

Linealización, puntos de equilibrio, estabilidad. Modelos estático y dinámico de un sistema

Antonio Osorio Cordero
ESIME del IPN

Abstract

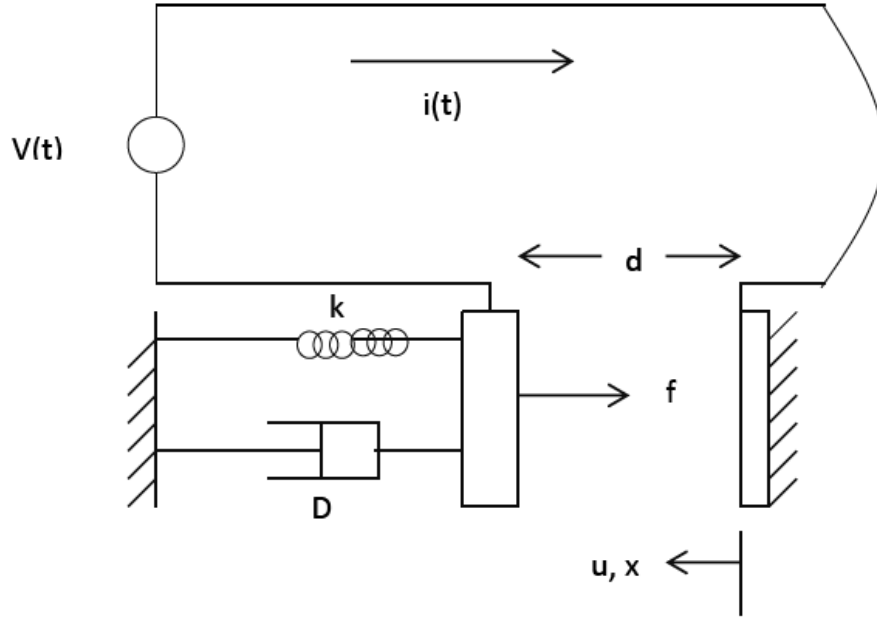
Se obtendrá la ecuación diferencial que describe a un sistema, se presentarán los conceptos de puntos de equilibrio de éste, se determinará su estabilidad. La ecuación diferencial resultante es no lineal. Se obtendrá una versión lineal de ella que dará como resultado un modelo estático de la planta y un modelo dinámico de la misma.

1 Linealización, puntos de equilibrio, estabilidad. Modelos estático y dinámico del sistema.

Se presentará a continuación un sencillo ejemplo para ilustrar cómo se obtiene un modelo de espacio de estado de un sistema simple. El sistema es de una entrada y una salida (siso). Se escribirán las ecuaciones que describen al sistema que resultan de hacer un balance de las fuerzas involucradas. La ecuación final que describe al sistema es una ecuación diferencial no lineal. Se obtiene un modelo estático del sistema que permite determinar los puntos de equilibrio del sistema, se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio. Posteriormente se procede a obtener un modelo dinámico lineal del sistema, que es una aproximación lineal alrededor de un punto de equilibrio, se obtiene la función de transferencia correspondiente y finalmente un modelo de espacio de estado del sistema.

1.1 Ejemplo. Ecuaciones que rigen el comportamiento de la planta.

Considérese el siguiente sistema electromecánico:



Con el objetivo de tener completez, se incluirá la obtención de la expresión de la fuerza electrostática f que resulta en este capacitor variable. La potencia eléctrica está dada por

$$p(t) = v(t) * i(t) = \frac{dw(t)}{dt} \quad (1)$$

donde $w(t)$ es la energía correspondiente a esa potencia. El voltage en un capacitor está dado por

$$v(t) = \frac{Q}{C} \quad (2)$$

donde Q es la carga del capacitor y C es la capacidad. Así que la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor está dada por:

$$\begin{aligned} dw(t) &= v(t)i(t)dt \\ &= \frac{q}{c}i(t)dt \\ &= \frac{q}{c} \frac{dq}{dt} dt \end{aligned} \quad (3)$$

Integrando de 0 a w_f y de 0 a Q , se tiene:

$$\begin{aligned} w_f &= \frac{1}{2C}Q^2 \\ &= \frac{1}{2}Cv^2(t) \end{aligned} \quad (4)$$

porque $Q = v(t)C$

Por otro lado, en el caso del capacitor variable, si se supone que tanto la parte eléctrica como la mecánica son una carga, un balance de energía indica que la energía eléctrica suministrada al circuito más la energía mecánica suministrada a la parte mecánica, debe ser igual a la energía almacenada en el campo eléctrico, esto es

$$dw_e + dw_m = dw_f \quad (5)$$

en donde w_e , w_m , y w_f son la energía eléctrica, mecánica y la almacenada en el campo, respectivamente. Esta última expresión se puede reescribir como:

$$v(t)i(t)dt + f dx = d\left(\frac{1}{2}Cv^2(t)\right) = Cv(t)dv(t) + \frac{1}{2}v(t)dC \quad (6)$$

Pero por otro lado, $i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(Cv(t))}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt} + v(t)\frac{dC}{dt}$ por lo que la ecuación anterior puede reescribirse de la siguiente manera:

$$v(t)C\frac{dv(t)}{dt}dt + v^2(t)\frac{dC}{dt}dt + f dx(t) = Cv(t)dv(t) + \frac{1}{2}v(t)dC \quad (7)$$

despejando a f de esta última ecuación se tiene:

$$f = -\frac{1}{2}v^2(t)\frac{dC}{dx} \quad (8)$$

Esta es la expresión para la fuerza electrostática entre las dos placas del capacitor variable. El signo negativo en esta expresión se debe al hecho de que como $C = \varepsilon A/x$, la razón de cambio de C con respecto a x , es negativa.

Por el principio de D´Lambert, la suma de fuerzas en la masa es igual a cero, así que

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + k(x - d) - \frac{1}{2}v^2(t)\frac{dC}{dx} = 0 \quad (9)$$

d se introduce porque el resorte tiene una condición inicial. De acuerdo a la figura, cuando $x(t) = 0$, la posición del resorte es d , por eso el término $k(x - d)$, que es igual a cero cuando $x = d$.

Por otro lado, $C(x) = \frac{\varepsilon_0 A}{x}$, por lo que

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 A}{x^2} \quad (10)$$

Así que la última ecuación puede escribirse como:

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + K(x(t) - d) + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A v^2(t)}{x(t)^2} = 0 \quad (11)$$

Esta es la ecuación que describe el movimiento de la masa M . Como puede observarse, esta ecuación es no lineal en $v(t)$ y no lineal en $x(t)$.

1.2 Puntos de equilibrio del sistema.

Los puntos de equilibrio del sistema se pueden encontrar fácilmente haciendo igual a cero todas las derivadas en la ecuación del sistema:

$$K(X_0 - d) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{X_0^2} = 0 \quad (12)$$

Se han sustituido $v(t)$ y $x(t)$ por V_0 y por X_0 respectivamente, porque si las derivadas de $x(t)$ y de $v(t)$ son cero, $x(t)$ y $v(t)$ o son cero o son constantes, como el caso en el que son cero no interesa, suponemos que son constantes y las llamamos X_0 y V_0 , respectivamente.

La ecuación anterior es el modelo estático de la planta. Los pares de valores (V_0, X_0) que satisfacen la ecuación anterior, constituyen los puntos de equilibrio del sistema o puntos de operación del sistema o "quiescent points" del sistema.

Es conveniente encontrar los puntos de operación realizando un análisis gráfico. Para tal efecto debe notarse en la ecuación anterior que los puntos de equilibrio son aquellos en los que la fuerza de restauración del resorte se iguala con la fuerza de atracción electrostática del capacitor variable. Así que la ecuación (12) puede escribirse de la siguiente manera:

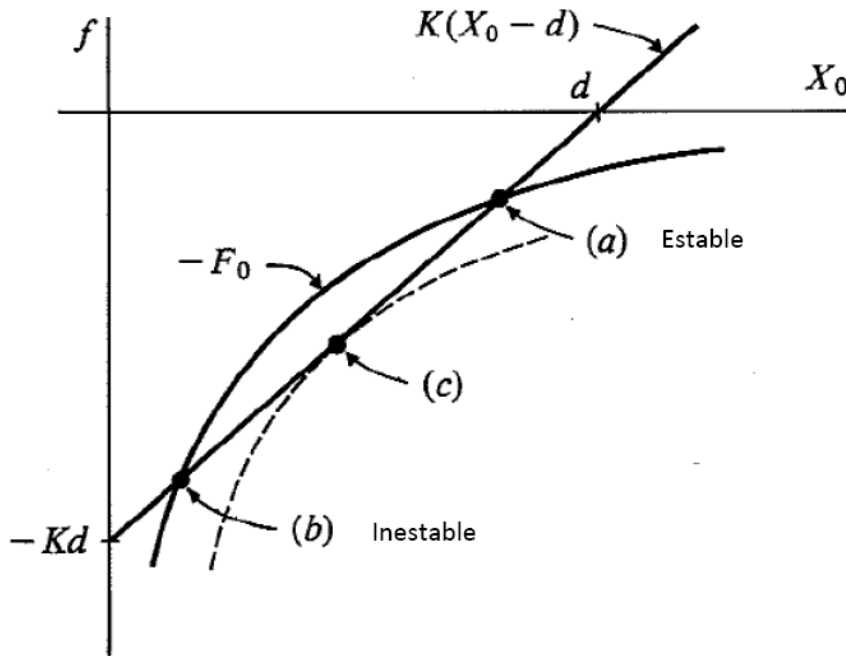
$$K(X_0 - d) = -F_0 \quad (13)$$

donde F_0 es la fuerza de restauración del resorte y por otro lado, esta fuerza es igual también a

$$F_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{X_0^2} \quad (14)$$

que es la fuerza electromecánica de operación. Si se grafica la fuerza f de restauración del resorte versus la distancia X_0 la ecuación (13) es una recta que cruza al eje de las ordenadas en $-kd$ y al de las abscisas en d . La ecuación (14) es una hipérbola, que es la fuerza electromecánica, con la restricción física de que X_0 no puede ser negativa, por otro lado se considera el negativo de la ecuación (14). Los puntos de intersección de estas dos curvas dan la solución a la ecuación (12). Ver figura 2.

Debe observarse que si V_0 aumenta, la curva $-F_0$ se mueve hacia abajo, hasta alcanzar una posición límite que es cuando aún hacen contacto las dos curvas. Este caso corresponde al punto c en la figura 2. Si



se incrementa V_0 , las curvas ya no se intersectan. En este caso ya no hay puntos de equilibrio y esto corresponde al caso en que para cualquier valor de X_0 la fuerza electromecánica es mayor que la fuerza del resorte y las placas del capacitor se juntan. El caso de interés es cuando las

curvas se cruzan en al menos dos puntos para algún valor de V_0 .

Supóngase que para algún valor de V_0 las curvas se intersectan en los puntos a y b . Como puede observarse en los puntos a y b la fuerza de restauración del resorte es igual a la fuerza electromecánica y por lo tanto se tienen dos puntos de equilibrio. Supóngase ahora que el sistema está en el punto de equilibrio a y se perturba al sistema moviendo las placas manualmente hacia la derecha de la figura dos, i.e. a la izquierda en la figura del dispositivo real. Si ese es el caso, obsérvese que el valor de la fuerza de restauración del resorte es mayor que la fuerza de atracción entre las placas, así que si el sistema se deja libre, por la acción de la fuerza de restauración del resorte, el sistema regresa al punto de equilibrio a . Si el sistema se perturba más allá de la distancia d , la fuerza de restauración del resorte cambia de signo y va en la misma dirección de la fuerza de atracción de las placas, así que el sistema tiende a regresar al punto de equilibrio a .

Por otro lado, si estando en el punto a el sistema se perturba moviendo las placas hacia la izquierda, es decir tratando de juntar las placas, puede observarse que hasta antes de llegar al punto b , en todo ese trayecto si se deja libre al sistema éste tiende a regresar al punto a porque la fuerza de

restauración del resorte, que en este caso actúa en sentido contrario a la fuerza electromagnética, es mayor que ésta. En conclusión, si el sistema se perturba alrededor del punto de equilibrio a , moviendo las placas a la derecha o a la izquierda y se deja libre, el sistema tiende a regresar al punto a , por lo que el punto de equilibrio a es un punto de equilibrio estable.

Con respecto al punto de equilibrio b , si se perturba al sistema moviendo la placa móvil del condensador hacia la derecha y se deja libre, el sistema tenderá a ir al punto de equilibrio a , pues en todo ese trayecto, la fuerza de restauración del resorte es mayor que la fuerza de atracción entre las placas. Por otro lado, si el sistema se perturba de tal manera que las placas se acerquen, puede observarse que entonces la fuerza de atracción entre las placas es mayor que la de restauración del resorte y entonces las placas se juntan. Concluyendo, el punto equilibrio b es inestable porque si se perturba al sistema alrededor de este punto y se le deja libre, el sistema se aleja del punto de equilibrio b , o se va al punto a o las placas se juntan, pero el sistema no regresa al punto b .

Una infinidad de plantas o procesos trabajan en puntos de operación determinados. Por esta razón los modelos estáticos como el de la ecuación (12) son necesarios para seleccionar el punto de operación más conveniente.

1.3 Obtención de un modelo dinámico lineal por suposición de señales pequeñas.

El análisis del modelo estático permite la obtención de los puntos de equilibrio. En el ejemplo se tienen en el caso de mayor interés, dos puntos de equilibrio, uno estable y el otro inestable.

Estando el sistema en el punto de equilibrio estable, punto a de la figura 2, si se perturba el sistema, éste regresa al punto de equilibrio. La pregunta es ¿cómo regresa el sistema al punto de equilibrio?. Es decir, ¿oscila alrededor de él y finalmente regresa a él, o se queda oscilando a su alrededor, o llega a éste suavemente? Para contestar esta pregunta

se necesita obtener un modelo del sistema que describa esta dinámica, es decir, es necesario obtener un modelo dinámico del sistema para contestar estas preguntas. A continuación se obtendrá un modelo lineal dinámico del sistema en cuestión.

Primeramente se obtendrá un modelo lineal del sistema a partir de la ecuación (11). La técnica empleada se denomina linealización por suposición de señales pequeñas. Se puede linealizar el sistema si se supone que existen pequeñas excursiones o variaciones alrededor del punto de operación del sistema.

Considérese que el voltage $v(t)$ aplicado al sistema es el siguiente

$$v(t) = V_0 + v_1(t), \quad \|V_0\| \gg \|v_1(t)\| \quad (15)$$

en donde V_0 es un voltage de DC relativamente grande comparado con $v_1(t)$ que es un voltage variable. De manera análoga se supone que la señal de salida $x(t)$ correspondiente está dada por

$$x(t) = X_0 + x_1(t), \quad \|X_0\| \gg \|x_1(t)\| \quad (16)$$

Substituyendo a $v(t)$ y a $x(t)$ dadas por (15) y (16) en (11) se tiene

$$M \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + D \frac{dx_1(t)}{dt} + K(X_0 - d + x_1(t)) + \frac{A\varepsilon_0(V_0 + v_1(t))^2}{2(X_0 + x_1(t))^2} = 0. \quad (17)$$

Los términos cuadráticos del último término de esta ecuación se pueden aproximar y estas aproximaciones hacen posible la obtención del modelo lineal.

El término $(V_0 + v_1(t))^2$ puede aproximarse de la siguiente manera:

$$(V_0 + v_1(t))^2 = V_0^2 + 2V_0v_1(t) + v_1(t)^2 \cong V_0^2 + 2V_0v_1(t). \quad (18)$$

Esta aproximación se puede efectuar por la suposición (15), así que $v_1(t)$ se puede descartar.

De manera análoga se aproxima el término $(X_0 + x_1(t))^2$, así que

$$\frac{1}{(X_0 + x_1(t))^2} \cong \frac{1}{X_0^2 + 2X_0x_1(t)} = \frac{1}{X_0^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{2x_1(t)}{X_0}} \right]. \quad (19)$$

El término $\frac{1}{1 + \frac{2x_1(t)}{X_0}}$ es de la forma $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots \cong 1 - a$ si $a \ll 1$, así que la última ecuación puede aproximarse por

$$\frac{1}{(X_0 + x_1(t))^2} = \frac{1}{X_0^2} - \frac{2x_1(t)}{X_0^3}. \quad (20)$$

Substituyendo las aproximaciones (18) y (20) en (17), se tiene

$$M \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + D \frac{dx_1(t)}{dt} + K(X_0 - d + x_1(t)) + \frac{A\varepsilon_0}{2} [V_0^2 + 2V_0v_1(t)] \left[\frac{1}{X_0^2} - \frac{2x_1(t)}{X_0^3} \right] = 0$$

si el producto $x_1(t)v_1(t)$ se desprecia por ser el producto de cantidades pequeñas respecto al resto de los sumandos, la expresión anterior puede reescribirse de la siguiente manera

$$M \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + D \frac{dx_1(t)}{dt} + \left(K - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^3} \right) x_1(t) + \frac{A\varepsilon_0 V_0}{X_0^2} v_1(t) + K(X_0 - d) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{X_0^2} = 0 \quad (21)$$

Esta ecuación es la suma de dos ecuaciones,

$$K(X_0 - d) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{X_0^2} = 0, \quad \text{modelo estático} \quad (22)$$

$$M \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + D \frac{dx_1(t)}{dt} + \left(K - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^3} \right) x_1(t) + \frac{A\varepsilon_0 V_0}{X_0^2} v_1(t) = 0, \quad \text{modelo dinámico} \quad (23)$$

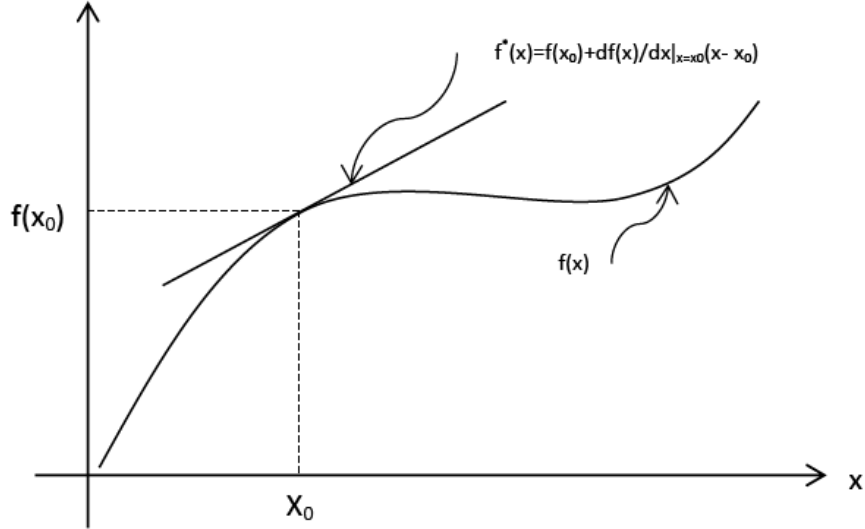
La solución total del sistema está dada por la suma de las soluciones de las ecuaciones (22) y (23). La ecuación (22) es el modelo estático del sistema. La ecuación (23) es el modelo dinámico del sistema. Obsérvese que esta última ecuación diferencial es lineal en $x_1(t)$ y lineal en $v_1(t)$, por lo que se puede obtener la función de transferencia correspondiente al sistema descrito por ella. Es importante hacer notar que en la ecuación (23) el punto $(x_1(t) = 0, v_1(t) = 0)$ que sería el origen para este sistema, corresponde al punto de operación (X_0, V_0) del sistema original. Esto es, la solución de (23) está "montada" en el punto de operación correspondiente dado por (22).

Este método de linealizar una ecuación no lineal, es equivalente a obtener la expansión de primer orden de una función no lineal por una serie de Taylor alrededor de un punto. En este caso el punto es un punto de operación del sistema.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera y sea x_0 un punto cualquiera.

Se puede consultar en cualquier libro de cálculo que la función f se puede aproximar por una serie de Taylor de la siguiente manera:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$



Una aproximación de esta función al primer orden es:

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) \quad (24)$$

Esto equivale a aproximar a la función $f(x)$ en el punto x_0 por una recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0 con pendiente $m = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ ver figura 3.

Obsérvese que esta aproximación es aceptable para pequeñas excursiones de x alrededor del punto x_0 . Como puede intuirse, el tamaño de estas excursiones de x alrededor de x_0

dependen también de en qué parte de la curva se lleva a cabo esta aproximación.

Una generalización de la expresión (24) al caso en que $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, esto es cuando por ejemplo f es

$$f = f(x(t), u(t), t) \in \mathbb{R}^n \text{ y } x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^{n_i} \quad (25)$$

es la siguiente

$$f(x(t), u(t), t) = f[x_0(t), u_0(t), t] + J_x[x_0(t), u_0(t), t] \tilde{x}(t) + \quad (26)$$

$$J_u[x_0(t), u_0(t), t] \tilde{v}(t) + h(t). \quad (27)$$

En donde $h(t)$ corresponde a todos los términos de alto orden que se desprecian y J_x y J_u son matrices jacobianas de f con respecto a x y u respectivamente, esto es J_x y J_u son matrices cuyo elemento (i, j) es:

$$(J_x)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \zeta_j} \quad y \quad (J_u)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \varsigma_j}$$

Es claro que en (26) $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0(t)$ y $\tilde{u}(t) = u(t) - u_0(t)$ son pequeñas perturbaciones alrededor de $x_0(t)$ y de $u_0(t)$ y que $\tilde{x}(t) = x_1(t)$ y $\tilde{u}(t) = u_1(t)$ de acuerdo a las suposiciones (15) y (16) cuando $x_0(t) = X_0$ y $u_0(t) = V_0$.

A continuación se obtendrá la ecuación (21) efectuando una simple aplicación de la expresión (26):

La ecuación del sistema dada por (11) se puede escribir de la siguiente forma:

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + D \frac{dx_1(t)}{dt} + f(x(t), u(t), t) = 0 \quad (28)$$

donde

$$f(x(t), u(t), t) = K(x(t) - d) + \frac{1}{2} \frac{A\varepsilon_0 v^2(t)}{x(t)^2} = 0 \quad (29)$$

Expandiendo $f(x(t), u(t), t)$ por serie de Taylor al primer orden alrededor de $(x_0(t) = X_0, v_0(t) = V_0)$, con ayuda de la ecuación (26) se tiene:

$$f[x_0(t), u_0(t), t] = K(X_0 - d) + \frac{1}{2} \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^2} \quad (30)$$

donde claramente se puede ver que (30) corresponde al modelo estático del sistema. Por otro lado

$$J_x[x_0(t), u_0(t), t]x_1(t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[K(x(t) - d) + \frac{1}{2} \frac{A\varepsilon_0 v^2(t)}{x(t)^2} \right] \right\}_{(X_0, V_0)} x_1(t)$$

$$J_x[X_0, V_0(t), t]x_1(t) = \left(K - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^3} \right) x_1(t) \quad (31)$$

De manera análoga

$$J_v[X_0, V_0, t]v_1(t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[K(x(t) - d) + \frac{1}{2} \frac{A\varepsilon_0 v^2(t)}{x(t)^2} \right] \right\}_{(X_0, V_0)} v_1(t)$$

$$J_v[X_0, V_0, t]v_1(t) = \frac{A\varepsilon_0 V_0}{X_0^2} v_1(t) \quad (32)$$

Substituyendo (30), (31) y (32) en (26) y ésta última en (28) , se tiene

$$M \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + D \frac{dx_1(t)}{dt} + K(X_0 - d) + \frac{1}{2} \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^2} +$$

$$\left(K - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^3} \right) x_1(t) + \frac{A\varepsilon_0 V_0}{X_0^2} v_1(t) + h(t) = 0$$

considerando que los términos de alto orden en la expansión por serie de Taylor son despreciables se tiene que $h(t) = 0$. Por lo que finalmente la expresión anterior, después de reagrupar términos se puede escribir como

$$M \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + D \frac{dx_1(t)}{dt} + \left(K - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^3} \right) x_1(t) + \quad (33)$$

$$\frac{A\varepsilon_0 V_0}{X_0^2} v_1(t) + K(X_0 - d) + \frac{1}{2} \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^2} = 0$$

esta ecuación coincide con la ecuación (21), así que la linealización por suposición de señales pequeñas, no es otra cosa que una expansión en serie de Taylor de los términos no lineales de la ecuación diferencial del sistema.

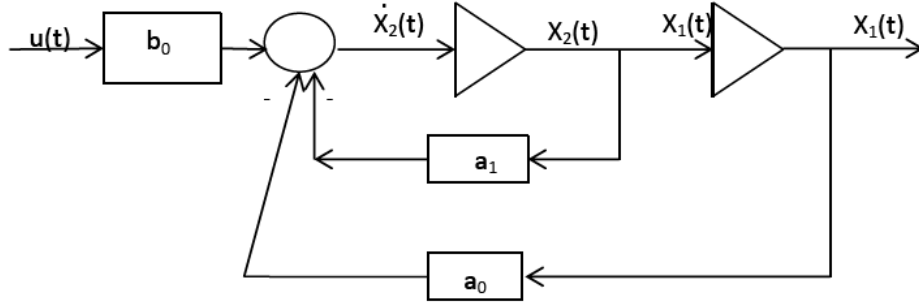
1.4 Empleo del modelo dinámico del sistema.

En esta sección se verá cuál es el objetivo del modelo dinámico del sistema.

Una vez que se ha seleccionado un punto de equilibrio del sistema con ayuda de la ecuación (22), ¿qué se puede hacer después?

Supóngase que se coloca al sistema en el punto de equilibrio a que se sabe que es estable. Esto se realiza con la ayuda de la ecuación (22). La ecuación (23) que es el modelo dinámico de la planta se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \frac{D}{M} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{1}{M} \left(K - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^3} \right) x_1(t) = -\frac{1}{M} \frac{A\varepsilon_0 V_0}{X_0^2} v_1(t) \quad (34)$$



Con el objeto de facilitar la exposición del tema, se definen las siguientes constantes

$$a_1 \triangleq \frac{D}{M} \frac{dx_1(t)}{dt}, \quad a_0 \triangleq \frac{1}{M} \left(K - \frac{A\varepsilon_0 V_0^2}{X_0^3} \right), \quad b_0 = -\frac{1}{M} \frac{A\varepsilon_0 V_0}{X_0^2}$$

entonces la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + a_0 x_1(t) = b_0 v_1(t) \quad (35)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad (36)$$

Se puede inmediatamente escribir la función de transferencia de este sistema:

$$H(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (37)$$

También se puede escribir inmediatamente un modelo de espacio de estado de esta función de transferencia, es decir, una realización de ésta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y(t) &= [1 \ 0] \mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (38)$$

y hacer un diagrama de computadora analógica de esta realización:

El comportamiento dinámico del dispositivo puede estudiarse empleando la ecuación diferencial (35) que describe al sistema (dinámico), empleando la función de transferencia dada por (37), empleando el modelo

en espacio de estado dado por (38) o simulando al sistema en computadora analógica o con ayuda de alguno de los paquetes existentes como Simulink que emulan a una computadora analógica en una computadora digital. La ecuación diferencial puede resolverse por cualquiera de los métodos conocidos, empleando por ejemplo la transformada de Laplace, . Se pueden contestar algunas preguntas empleando la función de transferencia del sistema. Se puede resolver la ecuación de estado, cuestión que se estudiará más adelante o en su defecto, se puede simular al sistema con ayuda del diagrama de computadora analógica, acción que equivale a resolver tanto la ecuación diferencial como la ecuación de estado del sistema.

Estas herramientas ayudan a responder preguntas como las siguientes:

Problema 1.- Supóngase que el sistema está en completo reposo, es decir, la fuente de voltage está apagada y las placas del condensador movable se encuentran separadas por la distancia d . Se sabe cuál es el voltage V_0 que debe conectarse a la fuente para tener el punto de equilibrio a . Al tiempo t_0 se conecta el voltage V_0 . Por el análisis que se efectuó anteriormente respecto de los puntos de equilibrio, se sabe que el sistema tenderá a ir al punto de equilibrio a . ¿Cómo es que el sistema llega al punto de equilibrio a ?

La respuesta se obtiene haciendo las condiciones iniciales $x_1(t_0) = d$, $x_1'(t) = 0$, $v_1(t) = V_0$ en la ecuación diferencial y resolviéndola o en su defecto resolviendo la ecuación de estado para esas condiciones iniciales. Pero más fácilmente, se puede simular el sistema empleando estas condiciones iniciales y esta entrada.

Problema 2.- Supóngase que el sistema está en el punto de equilibrio a , esto es $v(t) = V_0$. Manualmente se desplaza la placa movable del capacitor del punto a a la posición de cero elongación del resorte y al tiempo $t = t_0$ se suelta la placa. Se sabe que la placa regresa al punto a . La cuestión es cómo regresa al punto a . La respuesta se obtiene resolviendo la ecuación diferencial, o la ecuación de estado o simulando el sistema para las condiciones iniciales $x_1(t_0) = d - a$, $x_1'(t_0) = 0$ y la entrada $v_1(t) = 0$ en la ecuación diferencial o $u(t) = 0$ en el modelo en espacio de estado y en el diagrama de computadora analógica.

Problema 3.- Supóngase que el sistema está en el punto de equilibrio a , entonces $v(t) = V_0$ y $v_1(t) = 0$. Al tiempo $t = t_0$ se introduce una señal senoidal $v_1(t)$, esto es $v_1(t) = \sin(\omega t)$. ¿Cómo se comporta el sistema? La respuesta se obtiene resolviendo la ecuación diferencial, la ecuación de estado y simulando el sistema haciendo $v_1(t) = \sin(\omega t)$, $x_1(t_0) = 0$, $x_1'(t) = 0$.

Se pueden plantear otros problemas, como por ejemplo, ver cómo se

comporta el sistema cuando se le hace pasar de un punto de equilibrio a estable a otro punto de equilibrio a' también estable.

1.5 Obtención de un modelo de estado no lineal y su linealización.

Considérese la ecuación diferencial (11) que describe el funcionamiento del dispositivo de la figura 1 y que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{D}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{M} K(x(t) - d) + \frac{1}{M} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A v^2(t)}{x(t)^2} = 0 \quad (39)$$

Esta ecuación es no lineal en $x(t)$ y no lineal en $v(t)$. Un modelo en espacio de estado de esta ecuación se puede obtener de la siguiente manera:

Defínase $\mathbf{x}_1(t) \triangleq x(t)$ y defínase también $\mathbf{x}_2(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}_1(t)$. Entonces la ecuación del sistema (11) puede substituirse por el sistema de ecuaciones de primer orden siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \mathbf{x}_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{M} K(x_1(t) - d) - \frac{1}{M} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A v^2(t)}{x_1(t)^2} - \frac{D}{M} x_2(t) \end{aligned} \quad (40)$$

con una ecuación de salida dada por

$$y(t) = x_1(t) \quad (41)$$

como puede observarse, este modelo es de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$

en donde $f = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ como en (25).

Muchos sistemas pueden describirse mediante un modelo de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (42)$$

en donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, y $f(\cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^n$ es una función vectorial.

La salida está dada por :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (43)$$

en donde $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_o}$ y $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_o}$

El objetivo es obtener un modelo lineal en $\mathbf{x}(t)$ y lineal en $\mathbf{u}(t)$ a partir del modelo dado por (42) y (43). Es decir, se quiere obtener un modelo de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (44)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (45)$$

Sea $\mathbf{u}_0(t)$ una determinada entrada al sistema (42) y (43) y sea $\mathbf{x}_0(t)$ la solución de (42) correspondiente. Llámense a $\mathbf{u}_0(t)$ y a $\mathbf{x}_0(t)$ la entrada y la trayectoria nominales respectivamente. Así que $\mathbf{x}_0(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (46)$$

Normalmente todo sistema se opera cercano a las condiciones nominales, sin embargo puede haber pequeñas perturbaciones alrededor de estas condiciones nominales que quiere decir que $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ se desvían muy ligeramente de $\mathbf{u}_0(t)$ y $\mathbf{x}_0(t)$. Se puede escribir entonces lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_0(t) + \tilde{\mathbf{u}}(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0(t_0) + \tilde{\mathbf{x}}(t_0) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ son pequeñas perturbaciones. Correspondientemente, introdúzcase $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ de la siguiente manera:

((Se pueden encontrar aproximaciones para soluciones vecinas a $\mathbf{x}_0(t)$, para pequeñas desviaciones alrededor del estado inicial y de la entrada de una ecuación diferencial.

$\tilde{\mathbf{u}}(t)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ son pequeñas perturbaciones. Correspondientemente, introdúzcase $\tilde{\mathbf{x}}(t)$))

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (47)$$

Ahora sustitúyanse $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ en la ecuación diferencial (42) y realice una expansión de Taylor:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \\ &= f[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] + J_x[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + J_u[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \tilde{\mathbf{u}}(t) + h(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \\ &= f[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] + J_x[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + J_u[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \tilde{\mathbf{u}}(t) + h(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1\end{aligned} \tag{48}$$

donde J_x y J_u son matrices jacobianas de f con respecto a \mathbf{x} y \mathbf{u} respectivamente, esto es, J_x es una matriz cuyo elemento (i, j) es:

$$(J_x)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \tag{49}$$

en donde f_i es la i -ésima componente de f y ξ_j es el j -ésimo componente de \mathbf{x} . J_u se define de manera similar. El término $h(t)$ es una expresión que se supone pequeña con respecto a $\tilde{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$. Despreciando a $h(t)$, se ve que $\tilde{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$ satisfacen una ecuación lineal

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) + B(t)\tilde{\mathbf{u}}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{50}$$

En donde

$$A(t) = J_x[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \tag{51}$$

y

$$B(t) = J_u[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \tag{52}$$

La ecuación (50) es la linealización de (42) alrededor de $\mathbf{x}_0(t)$ y $\mathbf{u}_0(t)$. De manera análoga, (43) se aproxima a (45) en donde

$$C(t) = J'_x[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \quad y \tag{53}$$

$$D(t) = J'_u[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \tag{54}$$

donde los elementos (i, j) de las matrices J'_x y J'_u están dados respectivamente por

$$(J_x)_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial \xi_j} \text{ y } (J_u)_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial \xi_j} \quad (55)$$

en donde ξ_j es el j -ésimo componente de \mathbf{x} y de \mathbf{u} respectivamente en las expresiones anteriores.

Debe hacerse notar que $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ y $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ corresponden a $\mathbf{x}_1(t)$ y a $\mathbf{x}_2(t)$ en la linealización que se efectuó bajo la suposición de señales pequeñas.

Linealizando de acuerdo a estos resultados el modelo en espacio de estados dado por (40), se tiene

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= x_2(t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= -\frac{k}{m}(x_1(t) - d) - \frac{1}{2M} \frac{A\varepsilon_0 v^2(t)}{x^2(t)} - \frac{D}{M} x_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(t) &= J_x [\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \end{aligned}$$

entonces

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} = 1$$

por otro lado

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} = -\frac{k}{M} + \left. \frac{2\varepsilon_0 A v(t)^2}{2M x(t)^3} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} = \frac{1}{M} \left(\frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{X_0^3} - k \right)$$

y

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} = -\frac{D}{M}$$

Así que

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{M} \left(\frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{X_0^3} - k \right) - \frac{D}{M} & \end{bmatrix}$$

Para B se tiene

$$\begin{aligned} B(t) &= J_x [\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \end{array} \right] \Bigg|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\varepsilon_0 AV_0}{2MX_0} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para C se tiene

$$\begin{aligned} C(t) &= J'_x [\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \end{array} \right] \Bigg|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \end{aligned}$$

pero en este caso

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = g_1 [\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{t}] = x_1(t)$$

así que se tiene que

$$C(t) = [1 \ 0]$$

y en este caso

$$D(t) = 0$$

Así que sustituyendo a $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ en la ecuación (50), se obtiene el modelo dado por la ecuación (38) de la sección anterior.