1 Representación de vectores en diferentes bases.

Sea la base normal:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2, ..., e_3\} \tag{1}$$

Sea el vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ expresado en términos de la base(1):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = \qquad (2) \\ &= [e_1 e_2 ... e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I\mathbf{x} \end{aligned}$$

$x_i \in R \ \forall i = \overline{1,n}$ son las coordenadas del vector $\mathbf{x} \in R^n$ con respecto a la base dada por (1), esto es, con respecto a $\{e_1, e_2, ..., e_3\}$.

Ejemplo 1 *Sea* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$*, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 \end{aligned}$$

$x_1 = 1$ *y* $x_2 = 2$ *son las coordenadas del vector* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *con respecto a la base* $\{e_1, e_2\}$.

Sea $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ otra base para $\mathbf{R}^n$, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \widetilde{x}_1 t_1 + \widetilde{x}_1 t_1 + ... + \widetilde{x}_1 t_1 = \qquad (3) \\ &= [t_1 t_2 ... t_n] \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{bmatrix} = \\ &= T\widetilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$\widetilde{x}_1 \in \mathbf{R} \ \forall i = \overline{1,n}$ son las coordenadas del vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ con respecto a la base $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

Ejemplo 2 *Sea* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ *el vector del ejemplo 1:* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y sea la base*

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

El vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *puede expresarse en términos de esta nueva base de la siguiente manera:*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \widetilde{x}_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \widetilde{x}_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Esta expresión para $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo para* $\widetilde{x}_1$ *y* $\widetilde{x}_2$, *el vector* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *puede escribirse como:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = T\widetilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

El vector $\widetilde{\mathbf{x}}$ *es el vector* $\mathbf{x}$ *con respecto a la nueva base. Esto es, el vector* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *tiene las coordenadas* $x_1 = 1$ *y* $x_2 = 2$ *con respecto a la base* $\{e_1, e_2\}$ *y el vector* $\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ *es la representación del mismo vector* $\mathbf{x}$,*cuyos componentes* $\widetilde{x}_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, \widetilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *son las coordenadas del vector* $\mathbf{x}$ *con respecto a la base* $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$.

2 Representación de un mapeo lineal en diferentes bases

Sea la base normal para $\mathbf{R}^n$ dada por (1). Sea $A: \ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ y sea $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Considérese el mapeo

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \tag{4}$$

En esta expresión, los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están expresados en la base normal. Considérese una nueva base para $\mathbf{R}^n$:

$$\{t_1, t_2, ..., t_n\}, \ t_i \in \mathbf{R}^n \ \forall i = \overline{1, n} \tag{5}$$

La representación de los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en esta nueva base están dadas por

$$\mathbf{x} = T\widetilde{\mathbf{x}} \tag{6}$$

$$\mathbf{y} = T\widetilde{\mathbf{y}} \tag{7}$$

En donde $T = [t_1 t_2 ... t_n] \ \in \mathbf{R}^n$.

El mapeo $A: \ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ en la base normal tiene una representación $\widetilde{A}$ en la nueva base (5) tal que

$$\widetilde{\mathbf{y}} = \tilde{A}\widetilde{\mathbf{x}} \tag{8}$$

La cuestión es encontrar la expresión que defina a $\widetilde{A}$.

De la expresión (8) se tiene que

$$\widetilde{\mathbf{x}} = T^{-1}\mathbf{x} \tag{9}$$

$$\widetilde{\mathbf{y}} = T^{-1}\mathbf{y} \tag{10}$$

Substituyendo a $\widetilde{\mathbf{x}}$ y a $\widetilde{\mathbf{y}}$ en (8) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{A}T^{-1}\mathbf{x} &= T^{-1}\mathbf{y} \implies \\ \mathbf{y} &= T\tilde{A}T^{-1}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{11}$$

Comparando esta última expresión con la expresión (4), es claro que

$$A = T\tilde{A}T^{-1}$$

y consecuentemente que

$$\widetilde{A} = T^{-1}AT \tag{12}$$

que es la representación de la matriz A en la base dada por (5).

Ejemplo 3 *Considere la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere la siguiente base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

La representación de A con respecto a esta base es:

$$\widetilde{A} = T^{-1}AT$$

donde

$$T=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad T^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3.5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

y finalmente:

$$\widetilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Otra forma de obtener la solución al problema planteado es observando que Ae_i, es igual a la i-ésima columnna de la matriz A expresada en la base normal (1). Y que si se selecciona una nueva base, por ejemplo la base

$$\{t_1, ..., t_n\}$$

la i-ésima columnna de la nueva representación $\widetilde{A}$ de la matriz A es la representación del vector At_i con respecto a la base $\{t_1, ..., t_n\}$.

Ejemplo 4 *Considere los mismos datos del ejemplo anterior. Sean* $\mathbf{a}_i$ *y* $\tilde{\mathbf{a}}_i$ $\forall i=\overline{1,n}$ *las i-ésimas columnas de las matrices* A *y* $\tilde{A}$ *respectivamente y* a_{ij} *y* $\tilde{a}_{ij}$ $\forall i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$ *los elementos de las matrices* A *y* $\widetilde{A}$ *respectivamente. Se puede verificar que*

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\mathbf{a}_1 \\
Ae_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}=\mathbf{a}_2 \\
Ae_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\mathbf{a}_3
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
At_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
At_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\
At_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -13 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Los vectores At_1, At_2 *and* At_3 *se expresarán ahora en la base* $\{t_1,...,t_n\}$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \widetilde{a}_{11}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \widetilde{a}_{21}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \widetilde{a}_{31}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_1 \text{ and } \widetilde{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} \\ \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{31} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} &= \widetilde{a}_{12}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \widetilde{a}_{22}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \widetilde{a}_{32}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_2 \text{ and } \widetilde{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{22} \\ \widetilde{a}_{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \widetilde{a}_{13}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \widetilde{a}_{23}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \widetilde{a}_{33}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_3 \text{ and } \widetilde{\mathbf{a}}_3 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{13} \\ \widetilde{a}_{23} \\ \widetilde{a}_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Resolviendo para $\widetilde{\mathbf{a}}_1$, $\widetilde{\mathbf{a}}_2$ *y* $\widetilde{\mathbf{a}}_3$, *se tiene finalmente:*

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_1 & \widetilde{\mathbf{a}}_2 & \widetilde{\mathbf{a}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

resultado que coincide con el del ejemplo anterior.