

1 Introducción

Sea el sistema dinámico, lineal, causal, invariante en el tiempo dado por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

en donde

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &\in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^{n_o}, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^{n_i} \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n_i}, \quad \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n_o \times n}, \quad \mathbf{D} \in \mathbf{R}^{n_o \times n_i}\end{aligned}\quad (2)$$

y

$$\begin{aligned}n &= \text{dimensión del espacio de estado} \\ n_i &= \text{número de entradas al sistema} \\ n_o &= \text{número de salidas del sistema}\end{aligned}$$

Este sistema se denotará por $L = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$, cuya Función de transferencia está dada por

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s) \in R(s)^{n_o \times n_i} \quad (4)$$

En donde

$$\begin{aligned}R(s)^{n_o \times n_i} &= \text{matriz de dimensiones } n_o \times n_i \text{ de funciones propias en } s \\ \mathbf{N}(s), \mathbf{D}^{-1}(s) &= \text{matrices polinomiales con } \det \text{ no nulo en } s\end{aligned}$$

El polinomio característico del sistema se define como

$$\pi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$\begin{aligned}\pi(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \\ &= (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)\end{aligned}\quad (5)$$

con

$$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{C}$$

valores propios de $\mathbf{A}$ o raíces de $\pi(s)$, que resultan ser los polos de la función de transferencia del sistema en cuestión. $\mathcal{C}$ es el campo de los números complejos.

Cuando $n_i = n_o = 1$

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_p s^p}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \\ &= \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_p)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}, n \geq p\end{aligned}\quad (6)$$

en donde

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \text{cero o raíz } i - \text{ésima de } D(s) = \text{polo } i - \text{ésimo de } H(s) \\ z_i(s) &= \text{cero o raíz } i - \text{ésima de } N(s) = \text{cero } i - \text{ésimo de } H(s) \end{aligned}$$

2 Asignación de polos por retroalimentación estática de los estados

Retroalimentación estática de los estados es aplicar al sistema (1) la siguiente entrada $\mathbf{u}(\mathbf{t})$

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}'(\mathbf{t}), \quad \mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n_i \times n} \quad (7)$$

Si este es el caso, entonces el sistema (1), se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}'(\mathbf{t})) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}'(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

realizando las operaciones indicadas, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{t})) + \mathbf{B}\mathbf{u}'(\mathbf{t}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}'(\mathbf{t}) = \\ \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}'(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

y finalmente el sistema (1), después de haber realizado retroalimentación estática de los estados se convierte en el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}'(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cl} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K} \end{aligned} \quad (9)$$

El polinomio característico de este nuevo sistema está dado por

$$\begin{aligned} \pi_{cl}(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1} = \\ &= s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0 = \\ &= (s - p'_1)(s - p'_2)\dots(s - p'_n) \end{aligned} \quad (10)$$

En conclusión, la retroalimentación estática de los estados, esto es, la aplicación de $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ dada por (7) al sistema original (1), lo modifica de tal manera que los polos del nuevo sistema retroalimentado (8), son las raíces de $\pi_{cl}(s)$ dado por (10).

El problema de la asignación de polos consiste en encontrar $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n_i \times n}$ en (7) tal que el polinomio $\pi_{cl}(s)$ dado por (10) sea igual a un polinomio propuesto o deseado $\pi_d(s)$

$$\begin{aligned}\pi_d(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1} = \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = \\ &= (s - p_{d1})(s - p_{d2})\dots(s - p_{dn})\end{aligned}\quad (11)$$

Esto es, el problema de la asignación de polos consiste en proponer una $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n_i \times n}$ en (7) tal que el nuevo sistema retroalimentado (8) tenga como polinomio característico a $\pi_d(s)$ dado por (11).

En otras palabras, el problema de la asignación de polos consiste en proponer $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n_i \times n}$ en (7), tal que los polos originales del sistema dados por $p_1, p_2, \dots, p_n$, se reubiquen en las posiciones $p_{d1}, p_{d2}, \dots, p_{dn}$ propuestas.

3 Solución al problema de asignación de polos, caso monovariable.

Sea el siguiente sistema lineal, invariante en el tiempo, con una entrada y una salida, i.e. monovariable, descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_p \frac{d^p u(t)}{dt^p}, \quad n > p \quad (12)$$

Obsérvese que en este caso, sin pérdida de generalidad, para el propósito de esta sección, $n > p$, lo que implica que la función de transferencia respectiva es estrictamente propia y está dada por

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_p s^p}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_p)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}, \quad n > p\end{aligned}\quad (13)$$

Una realización de esta función de transferencia, o de esta ecuación diferencial, es decir, una representación en variables de estado, es la realización denominada forma canónica controlable siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &\in \mathbf{R}^n, \quad y(t) \in \mathbf{R}, \quad u(t) \in \mathbf{R} \\ \mathbf{A} &\in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n \times 1}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}, d \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (15)$$

en donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{c}$ están dadas respectivamente por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & . & . & . & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n \times n} \quad (16)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{c} = [b_0 \quad b_1 \quad . \quad . \quad . \quad b_p \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0] \in R^{1 \times n} \quad (18)$$

De las representaciones (12), (13), (14) o modelos del sistema bajo estudio en cuestión, se puede observar que dada cualquiera de ellas, se pueden obtener inmediatamente las otras dos.

3.1 Problema

Sea el sistema dado por (12), (13), (14). Se desea por medio de retroalimentación estática de los estados, reubicar los polos $p_1, p_2, \dots, p_n$, del sistema, a las posiciones deseadas $p_{d1}, p_{d2}, \dots, p_{dn}$. Esto es, aplicando la entrada

$$u(\mathbf{t}) = \mathbf{k}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + u^*(\mathbf{t}), \quad \mathbf{k} \in \mathbf{R}^{1 \times n} \quad (19)$$

$$i.e. \quad \mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad . \quad . \quad . \quad k_n] \quad (20)$$

al sistema, se desea determinar $K \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ de tal forma que el sistema original con polinomio característico dado por

$$\pi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = \quad (21)$$

$$= (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (22)$$

se convierta en un nuevo sistema retroalimentado con polinomio característico π_d dado por

$$\begin{aligned}\pi_{cl}(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1} = \\ &= s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0 = \\ &= (s - p'_1)(s - p'_2)\dots(s - p'_n)\end{aligned}\tag{23}$$

3.2 Solución

Sustitúyase la entrada $u(\mathbf{t})$ dada por (18) en el sistema (14). Haciendo todas las operaciones correspondientes como se hizo para el caso general, el resultado es el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{24}$$

En donde

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$$

Como este es el caso monovariable $\mathbf{A}$ está dada en la forma canónica controlable dada por (16) y $\mathbf{b}$ y $\mathbf{k}$ están dadas por (17) y (18) entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{cl} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & . & . & . & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & . & . & . & k_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{cl} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & . & . & . & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & . & . & . & . & . & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_1 & . & . & . & . & . & -a_{n-2} + k_1 & -a_{n-1} + k_1 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ a'_0 & a'_1 & . & . & . & . & . & a'_{n-2} & a'_{n-1} \end{bmatrix}$$

en donde

$$a'_0 = -a_0 + k_1, \quad a'_1 = -a_1 + k_2, \dots, a'_{n-1} = -a_{n-1} + k_n$$

cuyo polinomio característico está dado por (10), i.e.

$$\begin{aligned} \pi_{cl}(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1} = \\ &= s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0 = \\ &= (s - p'_1)(s - p'_2) \dots (s - p'_n) \end{aligned} \tag{25}$$

pero para solucionar el problema de asignación de polos, lo que se desea es que este polinomio sea igual al polinomio deseado (11) que es uno de los datos del problema

$$\begin{aligned} \pi_d(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1} = \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = \\ &= (s - p'_{d1})(s - p'_{d2}) \dots (s - p'_{dn}) \end{aligned} \tag{26}$$

Por lo que en este caso, el monovariante, la solución del problema de asignación

de polos se reduce a igualar los polinomios $\pi_{cl}(s)$ y $\pi_d(s)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 a_0' &= -a_0 + k_1 = \alpha_0 \\
 a_1' &= -a_1 + k_2 = \alpha_1 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 a_{n-1}' &= -a_{n-1} + k_n = \alpha_{n-1}
 \end{aligned} \tag{27}$$

por lo que finalmente la solución al problema de asignación de polos, de esta última ecuación resulta ser

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \alpha_0 + a_0 \\
 k_2 &= \alpha_1 + a_1 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 k_n &= \alpha_{n-1} + a_{n-1}
 \end{aligned} \tag{28}$$