INTRODUCCION A SISTEMAS DINAMICOS

Antonio Osorio Cordero

1. Conceptos Básicos

En este capítulo se hará un breve repaso de los conceptos básicos de la Teoría de Sistemas necesarios para entender las bases de la Teoría del Control .

1.1. Definiciones Básicas

Existen tres conceptos básicos en la Teoría del Control, que es necesario definir para el buen entendimiento del material de este curso. Estos conceptos son:

- Planta o Proceso
- Modelo
- Sistema Dinámico

Planta o Proceso

Planta o proceso, es la realidad con la que va a trabajar el ingeniero en control. Esta definición es muy general, pero abundando, planta o proceso es cualquier cosa que encontramos en la naturaleza , como nuestro propio cuerpo, que podemos pensar que cumple el propósito de vivir, o una mesa, cuyo propósito es soportar pesos. Debe notarse, que el propósito depende del observador, en nuestro caso del ingeniero en control. Definida una planta así , resulta que tenemos plantas físicas, químicas, biológicas, sociales. Lo importante en este concepto es que la planta concebida así es el ente real que mapea estímulos o entradas, en salidas o respuestas a esos estímulos.

Modelo

Definition 1 *Un modelo es cualquier abstracción de la realidad que guarda-*
mos en nuestra mente.Es cualquier abstracción que realiza el ser humano, de una planta o proceso.

Remark 1 *Desde este punto de vista, cualquier abstracción que hacemos de cualquier planta o proceso, es un modelo. De hecho, una vez que tenemos un modelo, muchas veces basta con manipular el modelo en lugar de las plantas mismas para ensayar en éste la respuesta de la planta a los estímulos que nos interesan. Esta* *situación hace sentido cuando el modelo es lo suficientemente "bueno" como para que las entradas a éste, produzcan salidas muy cercanas, esto es, parecidas a las de la planta, que también es estimulada con las mismas señales de entrada que el modelo.*

Los modelos pueden ser de diferentes tipos: pictóricos, psicológicos, biológicos, matemáticos, etc..

En nuestro caso en particular, trataremos con modelos matemáticos.

Definición Sistema

Sistema es un modelo matemático que cumple con ciertos axiomas que lo caracterizan.

Remark 2 *Hemos dado esta definición de sistema, porque dar la definición de Kalman, por ejemplo, de lo que es un sistema Dinámico, en este momento no tendría sentido. Dar la definición axiomática de Sistema Dinámico, es equivalente a decirle a los niños de kinder que el color rojo es toda aquella energía electromagnética cuyo espectro se encuentra entre tal y cual frecuencia.*

Por el momento nos bastará con saber que un sistema es un modelo matemático "muy especial", en donde el concepto o propiedad básica es el de *dinámica*.

Siempre hay un abuso de lenguaje que a veces confunde al estudiante. A veces se intercambia la palabra sistema por el de planta o proceso. El abuso se justifica si se supone que el modelo que se tiene de la planta es muy bueno. Sin embargo, aún en este caso es incorrecto hacerlo porque no es lo mismo tratar con la planta que con un modelo (aunque sea muy exacto) de ella.

1.2. Sistemas

En esta sección hablaremos de las características generales de los sistemas.

Sistema Contínuo en el tiempo:

Es aquel que transforma señales de entrada contínuas en el tiempo en señales de salida contínuas en el tiempo, i.e.

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

o gráficamente :

figura 1. Sistema contnuo en el tiempo.

Sistema discreto en el tiempo

Similarmente, un sistema discreto en el tiempo o simplemente discreto, es aquél que transforma señales de entrada discretas en el tiempo, en señales de salida discretas en el tiempo. i.e.

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

o gráficamente:

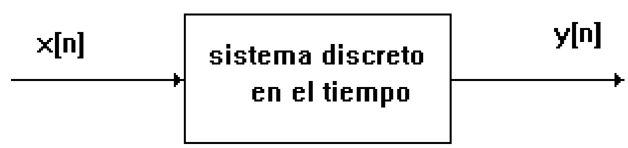


Figura 2.-Sistema discreto en el tiempo

Se pueden interconectar sistemas para realizar funciones más complicadas:

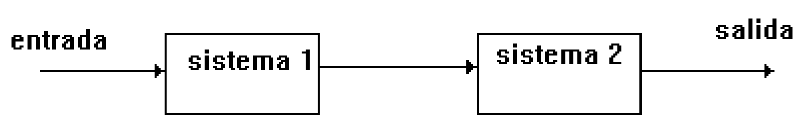


Figura 3. Interconexin serie o cascada

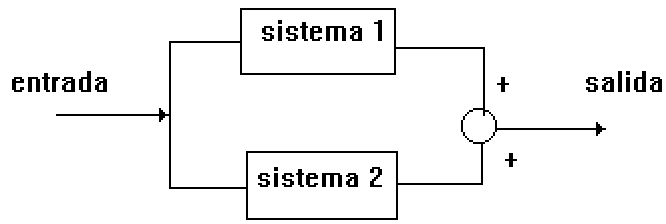


Figura 4.- Interconexin paralelo.

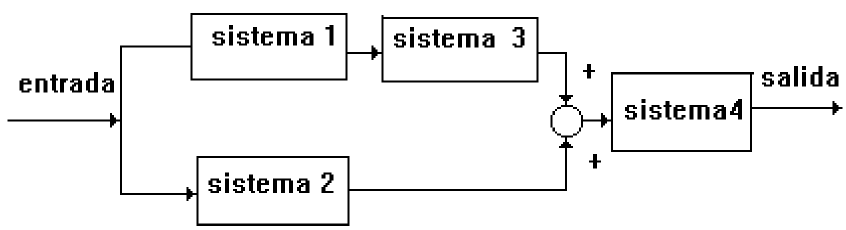


Figura 5.- Interconexin serie-paralelo

1.3. Propiedades de los Sistemas

SISTEMAS DINAMICOS Y ESTATICOS

Definición Sistemas con memoria (dinámicos) y sin memoria (estáticos).

Se dice que un sistema es estático o sin memoria si su salida en cualquier instante de tiempo depende solamente de entradas en ese mismo instante de tiempo.

Si el sistema no es estático, se denomina dinámico o con memoria. Esto es, un sistema dinámico es aquel cuya salida en un instante de tiempo dado, depende de entradas en otros instantes de tiempo y posiblemente (no necesariamente) de entradas en ese mismo instante de tiempo.

Remark 3 *Debe meditarse acerca de esta definición , en el siguiente sentido. Estrictamente hablando, ninguna planta en la naturaleza es estática. Se observa que en la naturaleza no existen fenómenos instantáneos, sin embargo, dependiendo de la escala de tiempo empleada, puede ser impráctico modelar una planta como un sistema dinámico. Por esta razón estudiamos los sistemas estáticos.*

Example 1 *El siguiente sistema*

$$y[n] = \left(2x[n] - x[n]^2\right)^2$$

es un sistema sin memoria porque el valor de $y[n]$ en cualquier instante de tiempo particular n_0 depende solamente del valor de $x[n]$ en ese mismo instante de tiempo n_0. Similarmente , un resistor con la entrada $x[n]$ tomada como la corriente y con el voltaje tomado como la salida i.e.

$$y(t) = Rx(t)$$

es también un sistema estático.

El sistema Identidad:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \\ y[n] &= x[n] \end{aligned}$$

es también un sistema sin memoria o estático.

Ejemplos de sistemas con memoria son los siguientes:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = x(t-1)$$

Un capacitor también es un sistema con memoria:

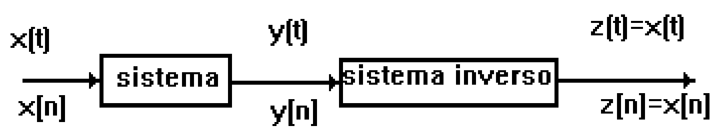
$$y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

donde la entrada $x(t)$ *es la corriente, la salida* $y(t)$ *es el voltaje y* c *es la capacitancia.*

INVERTIBILIDAD

Definición Invertibilidad y Sistemas Inversos

Se dice que un sistema es invertible si a distintas entradas les corresponden distintas salidas. Dicho de otra manera, un sistema es invertible si mediante la observación de sus salidas, se pueden determinar sus entradas. Esto es, si un sistema es invertible, podemos construír un sistema tal que conectado en cascada con el sistema original, reproduzca la entrada al sistema. A este último sistema que conectado en cascada con el original reproduce la entrada, lo denominamos el sistema inverso.



Example 2 *Ejemplos de sistemas Invertibles:*

sistema: $y(t) = 2x(t)$

sistema inverso: $z(t) = \frac{1}{2}y(t)$

sistema: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

sistema inverso: $Z[n] = y[n] - y[n-1]$

donde la diferencia entre dos valores sucesivos de la salida es precisamente el último valor de la señal de entrada.

Example 3 *Ejemplos de sistema no invertibles:*

$$y[n] = 0$$

$$y(t) = x^2(t)$$

CAUSALIDAD

Definición Causalidad.

Se dice que un sistema es causal si su señal de salida en cualquier instante de tiempo depende solamente de entradas en ese instante de tiempo y/o de entradas en instantes anteriores.

Remark 4 *Nos referimos a tales sistemas como no anticipativos, ya que los valores de la señal de salida, no se anticipan a valores futuros de la señal de entrada. Consecuentemente, si dos entradas a un sistema causal son idénticas hasta algún instante de tiempo dado* t_0 *o* n_0*, las salidas correspondientes también deben ser iguales hasta ese instante de tiempo.*

Example 4 *Ejemplos de sistemas causales:*

$$y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y[n] = \left(2x[n] - x[n]^2\right)^2$$

Ejemplos de sistemas anticausales:

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y(t) = x(t+1)$$

Aunque los sistemas causales son de gran importancia, no son por ningún medio los únicos sistemas con significación práctica. Por ejemplo, la causalidad no es de fundamental importancia en aplicaciones tales como el procesamiento de imágenes, en las cuales la variable independiente no es el tiempo. Aún más, en el precesamiento de datos en los cuales la variable tiempo es la variable independiente pero que han sido grabados , como ocurre con la voz, datos geológicos, etc., no estramos restringidos por ningún medio a procesar los datos de manera causal.

A pesar de estas observaciones, cabe mencionar también que en la naturaleza, estrictamente hablando, no existen plantas no causales, sin embargo como acabamos de mencionar, los modelos no causales nos son útiles.

ESTABILIDAD

Antes de dar una definición de estabilidad, tendremos que dar el concepto de punto de equilibrio. Existen varias definiciones de estabilidad, sin embargo, el concepto o mejor dicho, la idea es la misma. Todas estas definiciones a la larga resultan ser equivalentes o unas contienen o implican a las otras. Nosotros nos restringiremos a definir lo que es la llamada estabilidad **BIBO (Bounded Input-Bounded Output)** y a definir lo que queremos decir por punto de equilibrio estable.

Definición Punto de Equilibrio

Se denomina punto de equilibrio de un sistema dinámico a aquél en el que la variable de interés permanece constante con todas sus derivadas iguales a cero.

Más adelante se hablará otra vez de lo que es un punto de equilibrio y se dará una definición más rigurosa cuando tratemos con ecuaciones diferenciales para describir a los sistemas dinámicos.

Definición Puntos de equilibrio estables e inestables

Supóngase que se tiene un sistema dinámico autónomo, es decir, sin señal de entrada. Supóngase además que el sistema se encuentra en un punto de equilibrio. Este punto de equilibrio se denominará **punto de equilibrio estable** si cuando se deja evolucionar libremente al sistema a partir de una condición inicial en una vecindad del punto de equilibrio, el sistema regresa al punto de equilibrio. Si por el contrario, el sistema , al ser dejado libremente se aleja del punto de equilibrio, el punto de equilibrio se denominará **punto de equilibrio inestable**.

En la siguiente figura tenemos representados a dos sistemas en dos puntos de equilibrio diferentes.

Suponga que las superficies cóncava y convexa son superficies de paredes infinitas y que sobre ellas rueda una pelota.

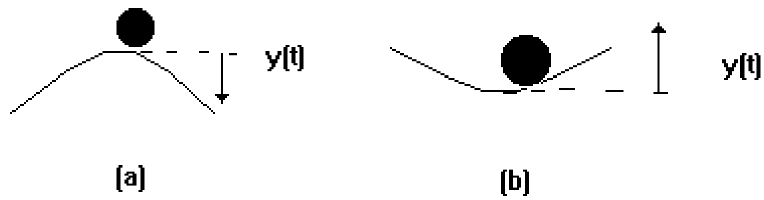


Figura 6.- Puntos de equilibrio

Es claro que en el caso (a), si la pelota se coloca en una posición inicial en la vecindad del punto de equilibrio mostrado y se deja evolucionar al sistema libremente, la pelota se alejará del punto de equilibrio, mientras que en el segundo caso, en el (b), la pelota regresará eventualmente a su punto de equilibrio. Así que el punto de equilibrio en el caso (a) es inestable y en el caso (b) es estable.

A continuación daremos otra definición de estabilidad que está incluida en la definición anterior de punto de equilibrio

Definición Estabilidad BIBO (Bounded Input-Bounded Output)

Se dice que un sistema es **BIBO estable** si a entradas acotadas corresponden salidas acotadas.

Con referencia a la figura anterior, supóngase ahora que en ambos casos la pelota se encuentra en el punto de equilibrio, es decir, con condiciones iniciales cero. Resulta claro que si introducimos al sistema como entrada un pequeño desplazamiento $x(t)$ (una entrada acotada) en la dirección mostrada en la figura, en el caso (a) tendremos que la respuesta del sistema es exageradamente grande. De hecho infinita si las paredes del la superficie cóncava también son infinitas. En el caso (b) resultará que a una pequeña entrada $x(t)$ corresponderá también un pequeño desplazamiento en $y(t)$ por lo que en este segundo caso, el sistema es BIBO estable.

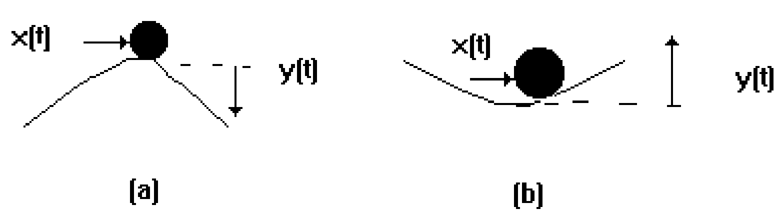


Figura 7. Sistemas BIBO Inestable (a) y estable (b)

Example 5 *Considere el sistema*

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$$

suponga que la entrada $x[n]$ *está acotada en magnitud por algún número, digamos* B*, para todos los valores de* n*. Entonces, es fácil ver que el valor más grande que puede adquirir* $y[n]$ *es también* B *, porque* $y[n]$ *es el promedio de un conjunto finito de valores de la entrada. Concluyendo,* $y[n]$ *es acotada y por lo tanto el sistema es estable.*

Example 6 *Considere el sistema*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Este sistema es inestable . Suma todos los valores pasados de la entrada hasta $-\infty$ *, en lugar de un conjunto finito de valores. Suponga por ejemplo que* $x[k] = 1 \ \forall k = -\infty, ..., n$*, que obviamente es una señal acotada, pues* *su máximo valor es uno. Puede verse que el escalón substituído en la expresión anterior daría como resultado un número infinito, pues estamos sumando uno, un número infinito de veces, así que el sistema es inestable.*

INVARIANCIA EN EL TIEMPO

Definición Invariancia en el tiempo

Un sistema es **invariante en el tiempo o simplemente invariante** si un corrimiento en el tiempo en la señal de entrada causa el mismo corrimiento en el tiempo de la señal de salida del sistema. Específicamente, si $y(t)$ ($y[n]$) es la salida de un sistema contínuo (discreto) cuando la entrada es $x(t)$ ($x[n]$), entonces $y(t-t_0)$ ($y[n-n_0]$) es la salida cuando se aplica la señal de entrada $x(t-t_0)$ ($x[n-n_0]$).

Example 7 *Considere el sistema*

$$y(t) = sen[x(t)]$$

veamos si es o no invariante en el tiempo.

Sea $x_1(t)$ *cualquier entrada al sistema y sea*

$$y_1(t) = sen[x_1(t)] \tag{1}$$

la salida correspondiente. Considérese una segunda entrada obtenida mediante el corrimiento de $x_1(t)$ *:*

$$y_2(t) = sen[x_2(t)] = sen[x_1(t - t_0)]$$

Similarmente, de la ecuación (1)

$$y_1(t - t_0) = sen[x_1(t - t_0)] \tag{2}$$

comparando las ecuaciones (1) y (2), vemos que

$$y_2(t) = y_1(t - t_0)$$

y por lo tanto concluimos que el sistema es invariante en el tiempo.

Example 8 *Considere al siguiente sistema discreto*

$$y[n] = nx[n]$$

veamos si es o no invariante. Considere las respuestas del sistema a las entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, donde $x_2[n] = x_1[n - n_0]$:

$$y_1[n] = nx_1[n]$$

$$y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n - n_0]$$

sin embargo, si desplazamos la salida $y_1[n]$, obtenemos

$$y_1[n - n_0] = [n - n_0]x_1[n - n_0] \neq y_2[n]$$

Por lo tanto concluimos que el sistema es variante en el tiempo.

LINEALIDAD

Previamente a la definición de sistema lineal, enunciaremos los principios de superposición y de homogeneidad, ya que es a través de ellos que se efectúa la definición.

Definición Principio de Superposición

Sea $y_i(t)$ ($y_i[n]$) la señal de salida de un sistema correspondiente a la entrada $x_i(t)$ ($x_i[n]$). Se dice que un sistema satisface el principio de superposición si al aplicársele la entrada

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l} x_k(t)$$

$$\left(x[n] = \sum_{k=1}^{l} x_k[n] \right)$$

la salida correspondiente es

$$y(t) = \sum_{k=1}^{l} y_k(t)$$

$$\left(y[n] = \sum_{k=1}^{l} y_k[n]\right)$$

Definición Principio de Homogeneidad

Sea $y(t)$ ($y[n]$) la señal de salida de un sistema corespondiente a la entrada $x(t)$ $(x[n])$, y sea $\lambda \in R$. Se dice que un sistema satisface el principio de homegeneidad si al aplicársele la entrada

$$x^{'}(t) = \lambda\ x(t)$$

$$\left(x^{'}[n] = \lambda\ x[n]\right)$$

la salida correspondiente es

$$y^{'}(t) = \lambda y(t)$$

$$\left(y^{'}[n] = \lambda\ y[n]\right)$$

Definición Sistema Lineal

Sistema lineal es todo aquel sistema que cumple con los principios de **Superposición** y de **Homogeneidad**.

Remark 5 *Es claro que si el sistema satisface el principio de Superposición, también satisface el de Homogeneidad. Esto se verifica rápidadmente cuando en la definición anterior del principio de Superposición, hacemos* $y_i(t) = y(t),\ \forall t$ *(*$y_i[n] = y[n],\ \forall n$*) y* $l = \lambda$*.*

Remark 6 *También debe ser claro que si un sistema es lineal y* $y_i(t)$ *(* $y_i[n]$*) es la señal de salida del sistema corespondiente a la entrada* $x_i(t)$ *(*$x_i[n]$*), entonces la respuesta del sistema a la entrada*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{j} a_k x_k(t)$$

$$\left(x[n] = \sum_{k=1}^{j} a_k x_k[n] \right)$$

será

$$y(t) = \sum_{k=1}^{j} a_k y_k(t)$$

$$\left(y[n] = \sum_{k=1}^{j} a_k y_k[n] \right)$$

Example 9 *Los siguientes sistemas son lineales:*

$$y(t) = Rx(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} x(t) dt$$

$$y(t) = 2x(t)$$

$$y[n] = 0$$

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y(t) = x(t+1)$$

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$$

$$y[n] = nx[n]$$

Example 10 *Los siguientes sistemas no son lineales:*

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y(t) = sen[x(t)]$$

¿Es el siguiente sistema un sistema lineal

$$y(t) = mx(t) + b$$

donde m y $b \in R$?.

2. Sistemas Lineales y sus propiedades en términos de su respuesta al impulso

2.1. Representación de señales en términos de impulsos

Caso discreto

Supóngase que se tiene la siguiente señal discreta

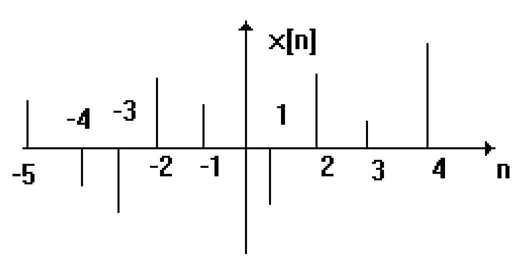


Figura 8. Una seal discreta

defina a $\delta[n]$ de la siguiente manera:

$$\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Se trata de expresar la señal de la figura en función de $\delta[n]$. Para tal efecto, usaremos a $\delta[n]$ como apuntador. Por ejemplo, si queremos apuntar al valor $x[-5]$, bastará con escribir

$$x[n] = x[-5]\delta[n+5]$$

y hacer $n = -5$. De manera análoga, para apuntar al valor $x[3]$, bastará con escribir

$$x[n] = x[3]\delta[n-3]$$

Siguiendo este razonamiento, la señal de la figura la podemos describir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x[n] \;\; = \;\; & ... + x[-5]\delta[n+5] + x[-4]\delta[n+4] + x[-3]\delta[n+3 \\ & + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n\;] + \\ & + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \\ & + x[4]\delta[n-4] + ... \end{aligned}$$

así que $x[n]$ lo podemos escribir como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad (4)$$

La ecuación (4) es la propiedad de corrimiento del impulso discreto. La operación indicada en esta ecuación se denomina convolución y se denota por

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

Es fácil ver que **el operador convolución** así definido es un operador lineal y que además conmuta, esto es:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]x[n-k]$$

Remark 7 *La convolución de una señal con una delta de Dirac nos da la misma señal.*

Pregunta:?‘ A qué es igual

$$x[n] * \delta[n - n_0] = ?$$

Caso contínuo

Supóngase que se tiene la siguiente señal contínua

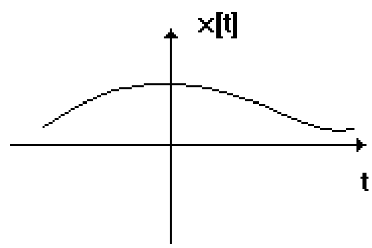


Figura 9. Una seal contnua

Defina a $\delta_\Delta(t)$ de la siguiente manera:

$$\delta_\Delta \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq \quad t \quad < \quad \Delta \\ 0 & cualquier \quad otro \quad tiempo \end{cases} \quad (5)$$

Obténgase una versión escalera de esta señal contínua

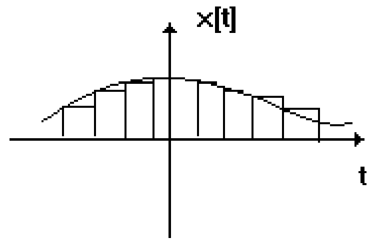


Figura 10. Versin escalera de una seal contnua

En la figura, los instantes de tiempo a la derecha del cero en el eje del tiempo son: $\Delta,\ 2\Delta,\ \ldots$ y a la izquierda del cero son $-\Delta,\ 2\Delta, \ldots..$

Empleando el mismo tipo de razonamiento que en el caso anterior, en este caso apuntaremos no a puntos, sino a alguno de los rectángulos en particular, de tal forma que podemos escribir lo siguiente

$$\hat{x}(t) = \ldots + x(-4\Delta)\delta_{\Delta}(t+4\Delta)\Delta + x(-3\Delta)\delta_{\Delta}(t+3\Delta)\Delta +$$

$$x(-2\Delta)\delta_\Delta(t+2\Delta)\Delta + x(-\Delta)\delta_\Delta(t+\Delta)\Delta + x(0)\delta_\Delta(t)\Delta +$$

$$x(1\Delta)\delta_\Delta(t-\Delta)\Delta + x(2\Delta)\delta_\Delta(t-2\Delta)\Delta +$$

$$x(3\Delta)\delta_\Delta(t-3\Delta)\Delta + ... =$$

de tal forma que podemos escribir para $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta) \tag{6}$$

pero

$$\lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t)\Delta = \delta(t) \tag{7}$$

y también

$$\lim_{\Delta\to 0} \hat{x}(t) = x(t) \tag{8}$$

entonces

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \qquad (9)$$

por lo que finalmente podemos escribir:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \qquad (10)$$

La ecuación (11) es la propiedad de corrimiento de una delta de Dirac. La operación indicada en esta ecuación se denomina **Convolución** y se denota por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \overset{\Delta}{=} x(t) * \delta(t)$$

Como en el caso discreto, es fácil ver que el operador convolución es lineal y que además conmuta. Así que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \overset{\Delta}{=} x(t) * \delta(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau \stackrel{\Delta}{=} \delta(t) * x(t)$$

Remark 8 *En este caso como en el caso discreto la convolución de una delta de Dirac con una señal contínua nos da la misma señal.*

Pregunta:?'A qué es igual?

$$x(t) * \delta(t - t_0) ='$$

2.2. La Integral de Convolución

Este resultado es importante porque lo que se va a mostrar es que la respuesta al impulso de un sistema lineal, es suficiente para caracterizar su respuesta a un buen número de señales.

Supongamos que tenemos un sistema lineal contínuo. Supongamos también que tenemos la versión escalera de una señal de entrada $x(t)$,esto es:

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

Supóngase que la respuesta del sistema lineal a la señal de entrada $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$ es $h_{k\Delta}(t)$, i.e

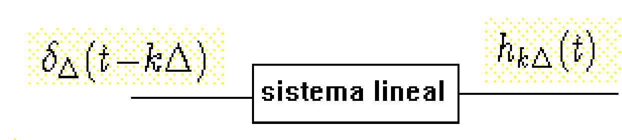


Figura 11.

Como el sistema es lineal, por el principio de homogeneidad se tiene que:

Figura 12.

Ahora, por la propiedad de superposición,se tiene que

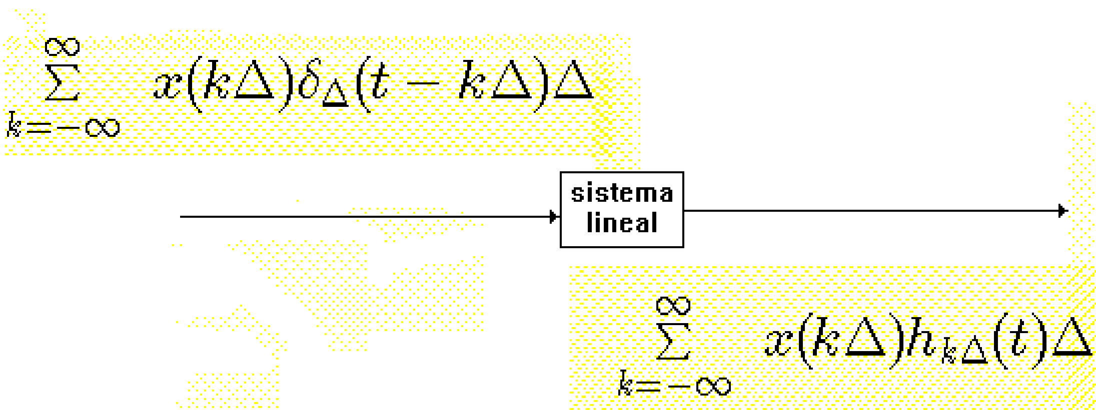


Figura 13.

Así que la respuesta del sistema lineal a la entrada

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

es

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \qquad (11)$$

en donde es claro que

$$h_{\tau}(t) \quad \stackrel{\Delta}{=} \quad \text{es la respuesta del sistema a } \delta(t-\tau)$$

La ecuación (11) se conoce como la integral de convolución de $x(t)$ con $\delta(t)$. Si se consultan los textos sobre Control Automático, notarán que esta no es la ecuación que se presenta en ellos. A continuación obtendremos la ecuación que viene en los textos.

Si además de ser lineal , el sistema es invariante en el tiempo entonces

$$h_{\tau}(t) = h(t-\tau) \qquad (12)$$

y la ecuación (11) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{13}$$

Esta es la ecuación que viene en los libros de texto, en los que no nos dejan claro que el sistema que están tratando, es un sistema lineal invariante en el tiempo. La ecuación (13) es pues la integral de convolución que viene en los textos.

La convolución se representa por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \triangleq x(t) * h(t)$$

2.3. La sumatoria de convolución

El caso discreto es más fácil que el contínuo. Con referencia a la figura 13, lo que se tendría como entrada en esa figura, para el caso discreto, sería:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k\ )$$

y la salida correspondiente sería:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k\ [n]$$

y de manera similar al caso contínuo, si el sistema es invariante en el tiempo, entonces:

$$h_k\ [n] = h[n-k]$$

en donde

$$h_k\ [n] \overset{\Delta}{=} \text{ es la respuesta del sistema a } \delta(n-k\ )$$

y en donde

$$h[n] \triangleq \text{ respuesta del sistema a } \delta[n]$$

y por lo tanto, la sumatoria de convolución puede escribirse de la siguiente manera para el caso invariante en el tiempo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{14}$$

Como en el caso contínuo, la convolución también se denota por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \triangleq x[n] * h[n]$$

2.3.1. Propiedades del operador convolución

El operador convolución tiene las siguientes propiedades, que no probaremos por obvias:

- P1 $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ ($x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$) (conmutatividad)

- P2 $x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$

- $x[n] * [h_1[n] * h_2[n]] = [x[n] * h_1[n]] * h_2[n]$ (asociatividad)

- P3 $x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)]$

- $x[n] * [h_1[n] + h_2[n]] = [x[n] * h_1[n]] + [x[n] * h_2[n]]$ (distributividad)

A continuación veremos algunas de las consecuencias de estas propiedades.

Veamos por ejemplo la propiedad P1:

Remark 9 *P1 implica que los roles de $x(t)$ $(x[n])$ y de $h(t)$ $(h[n])$ son intercambiables lo que en diagramas de bloques puede expresarse como:*

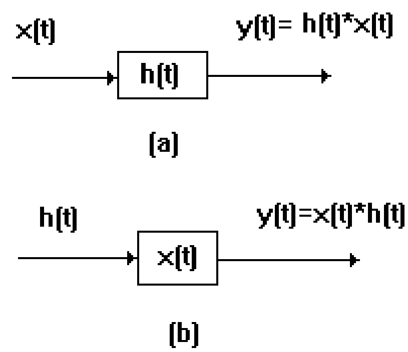


Figura 14.Propiedad de conmutatividad de la convolucin

De la figura anterior, puede verse que el caso(b), que representa el primer miembro de la ecuación en P1, no es una representación conveniente porque, aunque matemáticamente es correcta, distorsiona la idea que tenemos de un sistema como un operador que transforma señales de entrada en señales de salida. Esto es, en el caso (b) no resulta claro que la señal $x(t)$ causa que el sistema con respuesta al impulso $h(t)$ produzca una salida $y(t)$. Por esta razón, adoptaremos el caso (a), para expresar el resultado más importante de esta sección:

El primer modelo que adoptaremos de un sistema lineal es su respuesta al impulso. Es decir, de la figura 14, caso (a), vemos que estamos modelando a la planta a través de su respuesta al impulso. Por otro lado, la integral (sumatoria en el caso discreto) de convolución nos revela que la respuesta al impulso de un sistema lineal, caracteriza completamente la respuesta del sistema a cualquier entrada. Esto es, si se conoce la respuesta al impulso de un sistema lineal, eso es suficiente para poder calcular su respuesta a cualquier entrada. Lo único que se tiene que hacer, es convolucionar la respuesta al impulso con la entrada correspondiente.

Es una exageración decir que podemos calcular a través de la integral (sumatoria) de convolución la respuesta de un sistema lineal a cualquier entrada, porque la familia de señales de entrada está restringida a todas aquellas señales que hacen que la integral (sumatoria) de convolución converja (exista).

Veamos la propiedad P2:

Remark 10 *La propiedad P2 implica lo siguiente:*

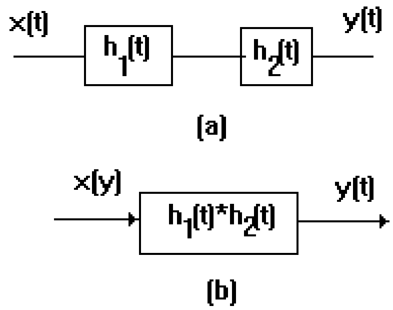


Figura 15. Propiedad P2 de la convolucin. (a) si y solo si (b)

El caso (a) representa al segundo miembro de la ecuación correspondiente a la propiedad P2. El caso (b) corresponde al primer miembro de esa igualdad.

Debe notarse que la convolución indicada en el caso (b), puede conmutar sin ningún problema.

Veamos por último la propiedad P3.

Remark 11 *La propiedad P3 implica lo siguiente:*

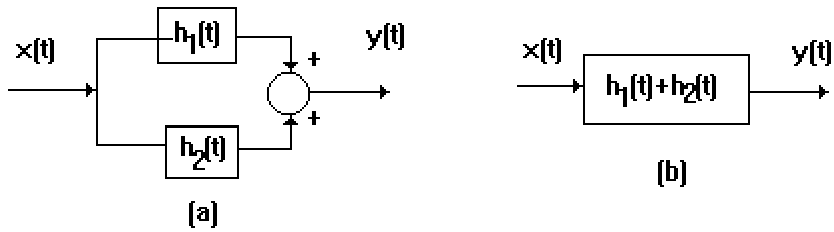


Figura 16. Propiedad P3 de la convolucin.

De la figura (a) se puede ver que este caso corresponde al segundo miembro de la igualdad expresada en P3 y el caso (b) corresponde al primer miembro de la igualdad mencionada.

De las propiedades de la convolución debe quedar claro que tenemos ante nosotros toda un álgebra de bloques. Debe notarse que el dominio es el tiempo y que la operación más importante en este dominio es la convolución.

2.4. Propiedades de los sistemas lineales en términos de su respuesta al impulso

Ya que la respuesta al impulso de un sistema lineal caracteriza completamente la respuesta del sistema a cualquier otra entrada (para la cual la integral o la sumatoria de convolución converjan) y ya que por esta razón hemos tomado como primer modelo de un sistema lineal su respuesta al impulso, es de suponerse que las propiedades del sistema lineal tales como si es dinámico o estático, si es causal, invertible, estable, etc., deben estar reflejadas en su respuesta al impulso. A continuación repasaremos las características que mencionamos para los sistemas en general , para los sistemas lineales en términos de su respuesta al impulso.

Como recordatorio, escribamos la sumatoria y la integral de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \tag{15}$$

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \tag{16}$$

$$= x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

2.4.1. Sistemas con memoria (dinámicos) y sin memoria (estáticos)

El objetivo es encontrar qué condiciones debe llenar la respuesta al impulso de un sistema lineal para ser estático o dinámico.

Recordemos que un sistema es estático si su salida en cualquier instante de tiempo solo depende de la entrada en ese mismo instante de tiempo. De la ecuación (15), para un sistema discreto, podemos ver que si requerimos que la salida en un instante de tiempo solo dependa de entradas en ese mismo instante de tiempo, entonces $h[n]$debe ser cero para toda $n \neq 0$ y diferente de cero para $n = 0$. En este caso requerimos que la respuesta al impulso del sistema lineal tenga la forma

$$h[n] = K\delta[n] \tag{17}$$

donde $K = h[0]$, es una constante y entonces, el sistema queda especificado por la relación

$$y[n] = Kx[n] \tag{18}$$

La ecuación (17) es la condición necesaria y suficiente para que el sistema lineal correspondiente sea estático.

Obviamente, si el sistema no es estático, es dinámico. O lo que es lo mismo, si el sistema es dinámico, su respuesta al impulso $h[n] \neq 0$ para algún o algunas $n \neq 0$.

Similarmente en el caso contínuo, el sistema es estático o sin memoria si $h(t) = 0$ para toda $t \neq 0$. Tal sistema tiene la forma

$$y(t) = Kx(t) \tag{19}$$

para alguna constante. La respuesta al impulso de este sistema es

$$h(t) = K\delta(t) \tag{20}$$

Note que si $K = 1$ en las ecuaciones (18) y (20), entonces el sistema correspondiente es el sistema identidad. En este caso:

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

y estas ecuaciones no son otra cosa que las conocidas propiedades de corrimiento de la delta de Dirac:

$$x[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Example 11 *Considere el sistema cuya respuesta al impulso es*

$$h[n] \triangleq \begin{cases} 1 & n = 0,1 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

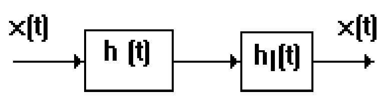
substituya esta respuesta al impulso en la sumatoria de convolución:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

esto es, el sistema es dinámico o con memoria.

2.4.2. Invertibilidad

Un sistema contínuo o discreto es invertible solo si podemos diseñar un sistema inverso tal que cuando conectado en cascada con el sistema original, reproduzca a su salida la señal de entrada al sistema original. En términos de la respuesta al impulso, lo que se requiere es que si se tiene un sistema con respuesta al impulso $h(t)$ $(h[n])$ y se presume que $h_I(t)$ $(h_I[n])$es el sistema inverso, la conexión en cascada de ambos, debe resultar en el sistema identidad, esto es (mostramos solo el caso contínuo, el discreto es similar)



y esto resulta en

Esto es, debemos tener como resultado el sistema identidad, lo que es equivalente a escribir la condición

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t) \tag{21}$$

Así que el sistema con respuesta al impulso $h_I(t)$ es el inverso del sistema con respuesta al impulso $h(t)$ si la ecuación (21) se satisface.

De manera similar para el caso discreto, si el sistema con respuesta al impulso $h_I[n]$, es el sistema inverso del sistema cuya respuesta al impulso es $h[n]$, se debe cumplir que

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

Example 12 *Considere el sistema lineal que consiste de un corrimiento puro en el tiempo:*

$$y(t) = x(t - t_0) \tag{22}$$

Este sistema es un retraso, si $t_0\rangle 0$ *y es un adelanto si* $t_0\langle 0$.

La respuesta al impulso de este sistema puede ser evaluada a partir de la ecuación (22), haciendo la señal de entrada al sistema igual a $\delta(t)$.

La respuesta al impulso del sistema es:

$$h(t) = \delta(t - t_{0)} \tag{23}$$

por lo que

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_{0)} \tag{24}$$

Esto es, la convolución de una señal con un impulso corrido en el tiempo, es la misma señal corrida en el tiempo. El sistema inverso para este sistema se obtiene como sigue:

todo lo que queremos hacer es recobrar la entrada, por lo que tenemos que hacer es recorrer la salida de regreso o de adelanto, dependiendo del valor de t_0.

Así que si tomamos

$$h_I(t) = \delta(t + t_0)$$

obtenemos el resultado requerido, esto es,

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t - t_{0)} * \delta(t + t_{0)} = \delta(t)$$

Similarmente en el caso discreto, un corrimiento puro en el tiempo tiene una respuesta al impulso $\delta[n - n_{0]}$ *y el sistema inverso tiene una respuesta al impulso dada por* $\delta[n + n_{0]}$.

Example 13 *Considere el sistema con respuesta al impulso dada por*

$$h[n] = u[n]$$

donde $u[n]$ *es un impulso unitario.El sistema que tiene esta respuesta al impulso esta dado por (verificar)*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k]$$

puesto que $u[n-k] = 0$ *para* $[n-k]\langle 0$ *y* 1 *para* $[n-k] \geq 0$ *la ecuación anterior se puede reescribir como*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

este sistema es un **acumulador o sumador** *que suma desde* $-\infty$ *hasta el instante presente. El inverso de este sistema está dado por*

$$y[n] = x[n] - x[n-1] = x[n] * \delta[n] - x[n] * \delta[n-1]$$

si $x[n] = \delta[n]$, *vemos que la respuesta al impulso del sistema inverso es*

$$\begin{aligned} h_I[n] &= \delta[n] * \delta[n] - \delta[n] * \delta[n-1] = \\ &= \delta[n] - \delta[n-1] \end{aligned}$$

Verifiquemos que efectivamente la convolución de estos dos sistemas es una delta de Dirac, implicando que un *sistema es inverso del otro, como ya lo sabemos:*

$$\begin{aligned} h[n] * h_I[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] = \\ &= u[n] - u[n-1] \; = \\ &= \delta[n] \end{aligned}$$

2.4.3. Causalidad

Se trata ahora de encontrar las características que deben tener $h(t)$ y $h[n]$ para que los sistemas correspondientes sean causales. Recordemos primeramente qué es un sistema causal.

Decimos que un sistema es causal cuando su salida en un instante de tiempo determinado, depende únicamente de valores de la entrada en instantes presentes o pasados.

Para encontrar la condición que debe llenar la respuesta al impulso del sistema para ser causal, analicemos primeramente el caso discreto. Posteriormente, cuando veamos el caso contínuo, daremos otro razonamiento que se pudo haber hecho desde el principio, pero que no es tan ilustrativo como el que presentaremos.

Empezaremos por escribir la sumatoria de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] =$$

$$= x[-\infty]h[\infty] + ... + x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] +$$

$$+ x[0]h[n\ ] + x[1]h[n-1] +$$

$$+x[2]h[n-2]+x[3]h[n-3]+...+ \tag{25}$$

$$+x[n-2]h[2]+x[n-1]h[1]+x[n]h[0]+$$

$$+x[n+1]h[-1]+x[n+2]h[-2]+...++x[\infty]h[-\infty]+$$

Queremos que $y[n]$ solo dependa de valores de x para el tiempo presente y para tiempos pasados. De la expresión anterior vemos que los valores de x para tiempos superiores a n, (valores futuros de la señal de entrada) están ponderados por valores de h con argumentos negativos. Queremos, por tanto, que todas estos últimos valores de x se anulen para que y no dependa de valores futuros de la entrada. Entonces, es claro que requerimos que todos los valores de h con argumentos negativos sean iguales a cero, esto es

$$h[n] = 0 \forall t \langle 0 \tag{26}$$

y entonces la ecuación (25) se reescribiría de la siguiente manera:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] =$$

$$= x[-\infty]h[\infty] + ... + x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] +$$

$$+ x[0]h[n\ ] + x[1]h[n-1] +$$

$$+ x[2]h[n-2] + x[3]h[n-3] + ... + \tag{27}$$

$$+ x[n-2]h[2] + x[n-1]h[1] + x[n]h[0]$$

que es lo que requerimos para que el sistema sea causal.

Resumiendo, para que el sistema sea causal, requerimos que su respuesta al impulso satisfaga la condición de la ecuación (26).

De manera análoga, para el caso contínuo tenemos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (28)$$

De esta última expresión se puede ver que si $y(t)$ va a depender únicamente de valores de $x(t)$ presentes o pasados, entonces τ debe variar entre $-\infty$ y t, i.e. $-\infty \leq \tau \leq t$ y esto implica que el argumento de h en la expresión enterior (28) esto es, $(t-\tau)$ debe ser mayor que cero. Es decir, si queremos que $y(t)$ solo dependa de valores de la entrada al tiempo presente o en tiempos pasados, requerimos que $h(t-\tau)$ sea diferente de cero para todo $t-\tau \geq 0$. Dicho de otra manera, requerimos que

$$h(t) = 0, \forall t \langle 0 \qquad (29)$$

que es la versión contínua de la ecuación (26).

Resumiendo, la condición que requerimos sobre la respuesta al impulso de los sistemas lineales para que sean causales, es que existan del lado derecho del eje del tiempo. Obviamente para los sistemas anticausales la respuesta al impulso existe solamente del lado izquierdo del eje del tiempo.

Example 14 *El corrimiento puro con respuesta al impulso*

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

es causal para $t \geq 0$ *(un retraso) y es anticausal para* $t \leq 0$ *(un avance).*

2.4.4. Estabilidad

Dijimos que un sistema es BIBO estable si a entradas acotadas tenemos salidas acotadas.

Considérese una entrada $x[n]$ acotada en magnitud:

$$|x[n]| < B \; \forall \; n \tag{30}$$

en donde $B < \infty$.

Suponga que aplicamos esta entrada a un sistema lineal discreto que tiene respuesta al impulso $h[n]$. Entonces lo siguiente es cierto:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \tag{31}$$

Puesto que el valor absoluto de la suma de un conjunto de números no es mayor que la suma de los valores absolutos de los números, podemos escribir lo siguiente:

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|\,|h[n-k]| \tag{32}$$

En la ecuación anterior, y haciendo uso de la ecuación (30) podemos escribir lo siguiente:

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \tag{33}$$

De esta última ecuación, podemos concluír que si la respuesta al impulso del sistema es absolutamente sumable, i.e.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{34}$$

entonces $y[n]$ estará acotada, i.e. $|y[n]| < \infty$ y por lo tanto el sistema será BIBO estable. Resumiendo, la condición suficiente sobre la respuesta al impulso de un sistema lineal discreto para que éste sea BIBO estable, está dada por la ecuación (34), esto es, la respuesta al impulso debe ser una señal **absolutamente sumable.**

En el caso contínuo, consideramos de manera análoga una entrada acotada, esto es:

$$|x(t)| < B < \infty, \ \forall t$$

de manera análoga al caso discreto tenemos que:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,|x(t-\tau)|\,d\tau \leq$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau$$

Y la condición para estabilidad es similar a la del caso discreto, esto es, se requiere que la respuesta al impulso sea en este caso una señal **absolutamente integrable, i.e.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty \tag{35}$$

Example 15 *Considere un sistema contínuo y uno discreto. Ambos son un corrimiento puro en el tiempo. En este caso sus respectivas respuestas al impulso son:*

$$h[n] = \delta[n - n_0] \text{ } y$$

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

y en este caso resulta que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[n - n_0]| = 1$$

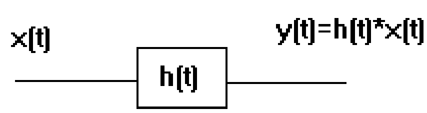
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t - t_0)| \, d\tau = 1$$

por lo que concluímos que ambos sistemas son BIBO estables.

Hasta ahora, hemos adoptado como primer modelo de los sistemas lineales a su respuesta al impulso. La razón para esto es que ésta caracteriza completamente la respuesta de los sistemas lineales a cualquier entrada a través de la integral o de la sumatoria de convolución. A continuación presentaremos otro modelo de los sistemas lineales, que nos permite obtener otro punto de vista de la planta.

3. Función de Transferencia

Sea un sistema lineal contínuo (de aquí en adelante nos concentraremos solamente en los sitemas contínuos, a menos que se indique lo contrario explícitamente) con respuesta al impulso $h(t)$, de tal forma que, del párrafo anterior tenemos que:



Esto es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{36}$$

Tomemos la Transformada de Laplace de esta última expresión:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = y(t) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-st}dt \tag{37}$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad, que se tienen en este caso y que salen del contexto de nuestra materia y que por tanto no mencionaremos, y por un teorema debido a Fubini, el orden de las integrales en la expresión anterior puede intercambiarse, de tal forma que tenemos:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-st}dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-st}dtd\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(s)e^{-s\tau}d\tau = H(s)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \\
&= H(s)X(s)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Como puede observarse de esta última ecuación, la convolución en el tiempo se transforma en producto en el dominio de Laplace. También sabemos que la convolución en el dominio de Laplace se convierte en un producto en el dominio del tiempo.

Comparando las expresiones (36) y (38), vemos que hemos convertido la convolución en un producto, esto es, ahora el problema de calcular la transformada de Laplace de la salida dada la transformada de Laplace de la entrada, es netamente algebraico. Esta es la primer ventaja que obtenemos con este nuevo modelo.

Obsérvese de la ecuación (38) primeramente que

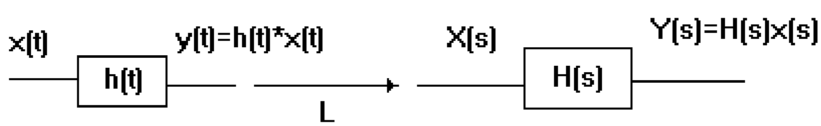
$$H(s) = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\} \tag{39}$$

y después que

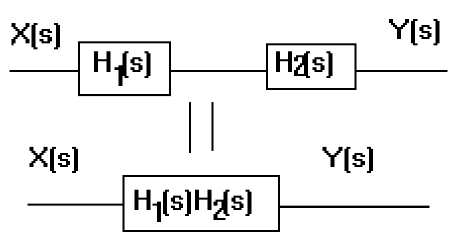
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{40}$$

Remark 12 *Es muy importante notar que el concepto de Función de Transferencia lo hemos definido solamente para los sistemas lineales. De las dos ultimas ecuaciones* *se puede ver que la función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso de un sistema lineal y que coincide con la relación de la transformada de Laplace de la salida, sobre la transformada de Laplace de la entrada.*

Resumiendo:



En este caso, también podemos definir un álgebra de bloques como en el caso de la respuesta al impulso:



Conexin cascada de funciones de transferencia

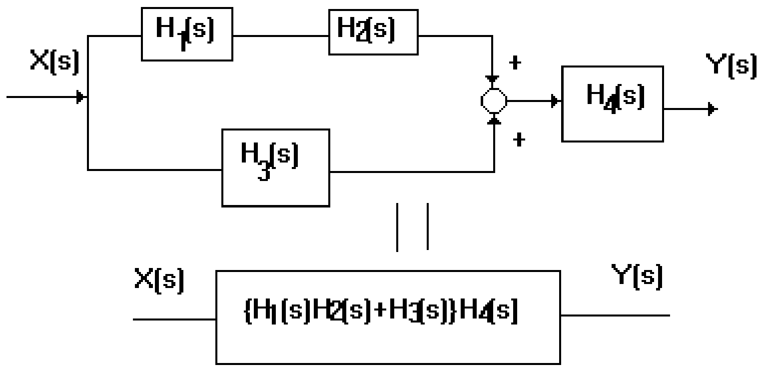


Figura 17.-Conexin serie paralelo

3.1. Polos y ceros

Sea R[s] el anillo de los polinomios en s con coeficientes reales. Sea en particular el polinomio $P(s)$ de grado n siguiente

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 \qquad (41)$$

Sean r_1, $r_2, ..., r_n$ las raíces del polinomio. Por el teorema fundamental del álgebra, el polinomio $P(s)$ puede reescribirse de la siguiente forma

$$P(s) = (s - r_1)(s - r_2)...(s - r_n) \qquad (42)$$

Definición Ceros de un polinomio

Las raíces $r_1, r_2, ..., r_n$ del polinomio $P(s)$ se denominan ceros del polinomio porque

$$P(r_i) = 0,\ \forall i = 1, ...n$$

Remark 13 *Se dice que un polinomio es* **mónico** *cuando el coeficiente del término de mayor grado en él es igual a la unidad. Así pues, el polinomio $P(s)$de la ecuación (41) es un polinomio mónico.*

En general, el tipo de señales que se manejan en ingeniería son señales de energía finita, pertenecientes al llamado espacio $L_2(-\infty, \infty)$. Por otro lado, las transformadas de Laplace de las respuestas al impulso de los sistemas que se estudian son casi siempre funciones racionales en la variable de Laplace s. Por lo tanto, en general podemos escribir la función de transferencia de la mayoría de los sistemas lineales de interés de la siguiente forma:

$$H(s) = K\frac{N(s)}{D(s)} = K\frac{b_0 + ... + b_p s^p}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} =$$

$$= K\frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_p)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)} \qquad (43)$$

Definición Polos y Ceros de $H(s)$

Sea una función de transferencia racional en s (la variable de Laplace) dada por la ecuación (43). Se denomina cero de la función de transferencia, todo aquel valor $s_i \in \mathcal{C}$ (el campo de los complejos) tal que $H(s_i) = 0$.

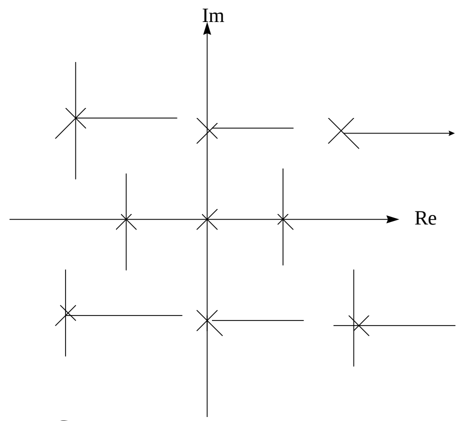
Se denomina polo de la función de transferencia, todo aquel valor $s_j \in \mathcal{C}$, tal que $H(s_j) = \infty$.

Remark 14 *Con respecto a la ecuación (43), es claro que los polos de la función de transferencia son los ceros del polinomio $D(s)$ i.e. $p_1, p_2, ..., p_n$. Los ceros de la función de transferencia son los ceros del polinomio $N(s)$ i.e. $z_1, z_2, ..., z_n$.*

Estas definiciones no dicen mucho cuando no hay una motivación. A continuación presentaremos un resultado que es clave en el estudio de los sistemas lineales y que nos servirá para dar una interpretación a los polos y a los ceros de una función de transferencia.

3.1.1. Señales propias de los sistemas lineales

Considere las señales $x(t) = e^{pt}$ en donde $p \in \mathcal{C}$ (el campo de los complejos). Para fines didácticos, graficamos estas señales en el tiempo para posibles valores de p, haciendo coincidir el origen de los ejes del tiempo y de $x(t)$ con la posición de p en el plano complejo:



$$ \tag{44} $$

Figura 18.-Seales exponenciales en el tiempo.

Considérese un sistema lineal con respuesta al impulso $h(t)$ y con entrada $x(t) = e^{pt}$, en donde $p \in \mathcal{C}$. Calcule la respuesta $y(t)$ del sistema .

Para obtener la respuesta, empleamos la integral de convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{pt} e^{-p\tau} d\tau = e^{pt} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau =$$

$$= e^{pt} H(p) \qquad (45)$$

En donde $H(p)$ es la función de transferencia del sistema evaluada en el punto p. Gráficamente lo que tenemos es lo siguiente:

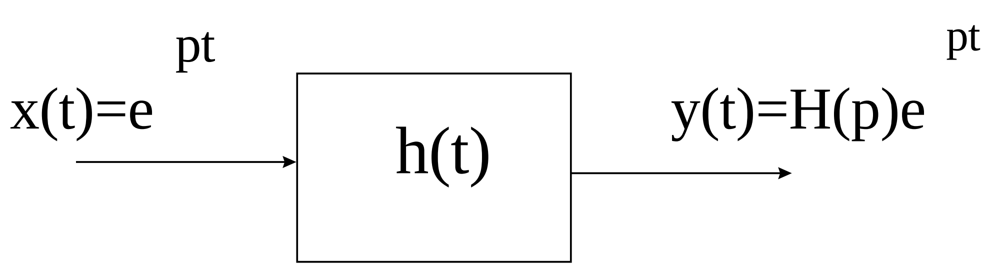


Figura 19.-Relacin entre dominios del tiempo y frecuencia

Este resultado es importante porque relaciona el dominio de Laplace con el dominio del tiempo. A partir de este resultado daremos los conceptos de polos y ceros.

Este resultado nos dice que si introducimos a un sistema lineal señales e^{pt} con $p \in \mathcal{C}$, la respuesta del sistema a estas señales es la misma afectada por una constante compleja. Esta constante compleja resulta ser la función de transferencia del sistema evaluada en el punto $p \in \mathcal{C}$. A este tipo de señales se les denomina *señales propias de los sistemas lineales.* La razón de ello es que los sistemas lineales las reproducen íntegras, pero afectadas de una constante compleja.

Suponga ahora que el sistema de la figura 19 tiene la siguiente función de transferencia

$$H(s) = K\frac{N(s)}{D(s)} = K\frac{b_0 + ... + b_p s^p}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} =$$

$$= K\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)} \tag{46}$$

y suponga que se introduce la señal $x(t) = e^{z_2 t}$, $z_2 \in \mathcal{C}$ es cualquier punto en el plano complejo. Entonces, de acuerdo al resultado anterior, la respuesta del sistema lineal a esta entrada será

$$y(t) = H(z_2)e^{z_2 t}$$

pero $H(z_2)$ de la ecuación (46) es igual a

$$H(z_2) = 0$$

Por lo que

$$y(t) = 0e^{z_2 t} = 0$$

Es claro que toda señal del tipo $x(t) = e^{z_i t}$ producirá una salida

$$y(t) = 0e^{zit} = 0$$

Por esta razón, a las frecuencias $z_i, \forall i = 1, m$ se les denomina *ceros de la función de transferencia.*

De manera análoga, suponga que ahora se introduce al sistema una señal $x(t) = e^{p_2 t}$, $p_2 \in \mathcal{C}$ es cualquier punto en el plano complejo. Entonces, de acuerdo al resultado anterior (ecuación (45)) la respuesta del sistema lineal a esta entrada será

$$y(t) = H(p_2)e^{p_2 t}$$

pero $H(p_2)$ de la ecuación (46) es igual a

$$H(z_2) = \infty$$

Por lo que

$$y(t) = \infty e^{z_2 t} = \infty$$

Es claro que toda señal del tipo $x(t) = e^{p_i t}$ producirá una salida

$$y(t) = 0e^{pit} = 0$$

Por esta razón, a las frecuencias $p_i, \forall i = 1, n$ se les denomina *polos de la función de transferencia.*

4. Respuesta en frecuencia de los sistemas lineales

De la relación entre los dominios del tiempo y de la frecuencia en un sistema lineal, que vimos líneas arriba, derivaremos un concepto muy importante y útil en la teoría del control, a saber, la respuesta en frecuencia del sistema.

Sea el esquema que vimos en la sección anterior:

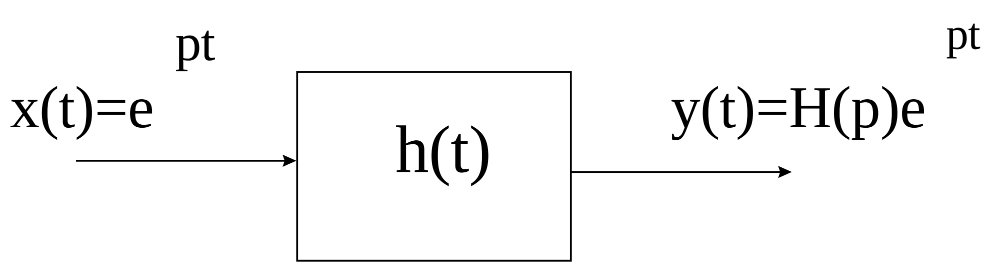


Figura 19.-Relacin entre dominios del tiempo y frecuencia

La respuesta en frecuencia tiene que ver con la respuesta de un sistema lineal a señales de entrada que son senoides de diferentes frecuencias. ¿Porqué es importante saber cómo responde un sistema lineal a señales senoidales de diferente frecuencia?. La respuesta tiene que ver con el tipo de señales que se manipulan en el control de procesos. Casi todas las señales que se manejan en el control de procesos son señales de energía finita (o acotada). Este tipo de señales pertenecen al llamado espacio $L_2(0, \infty)$, que está definido como el conjunto de todas las señales $f(t)$ tales que

$$\int$$

5. Ecuaciones Diferenciales Lineales

Hasta este punto hemos estudiado dos modelos de los sistemas lineales: la respuesta al impulso y la función de transferencia.

En esta sección estudiaremos una tercera representación de los sistemas lineales y estudiaremos su relación con las otras dos representaciones.

Sea la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_0 u(t) + ... + b_p \frac{d^m u(t)}{dt^m}, \tag{47}$$

$$y(0) = y_0, ..., \overset{(n-1)}{y}(0) = \overset{(n-1)}{y_0}$$

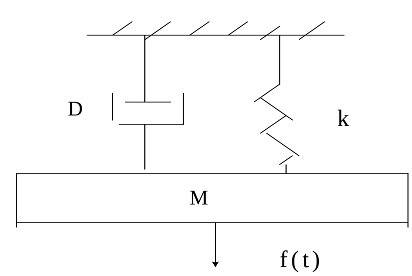
en donde $y(0) = y_0, ..., \overset{(n-1)}{y}(0) = \overset{(n-1)}{y_0}$ son n condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación (47).

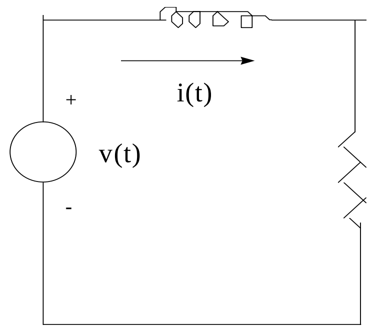
Remark 15 *Esas condiciones iniciales en particular, se usan como parte del método de solución, pero este no es el único conjunto de condiciones iniciales que se puede emplear.*

Remark 16 *Obsérvese que se ha considerado que el coeficiente de la derivada más alta es igual a la unidad. Este hecho no implica ninguna pérdida de generalidad, pues si este coeficiente no fuera la unidad, se puede dividir toda la ecuación entre este valor y obtener la ecuación (47).*

La ecuación (47) representa a un sistema lineal, dinámico, invariante en el tiempo. Puede representar a una infinidad de plantas o procesos. Por ejemplo, las plantas de las figuras siguientes se pueden modelar por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$





Si se quieren estudiar las propiedades del sistema representado por la ecuación (47), se puede recurrir a su respuesta al impulso, para a partir de ésta hacer conclusiones.

Que el sistema representado por la ecuación (47) es un sistema lineal, debe ser claro, puesto que el operador derivada y derivada enésima son operadores lineales. Sin embargo, puede suponerse en esa ecuación que la entrada es $u(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)$ por tanto, es fácil comprobar por substitución de $u(t)$ en la ecuación, que la salida será $y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)$.

Que el sistema es invariante en el tiempo es fácil demostrarlo si se reescribe la ecuación (47) en términos del operador derivada. Esto es, defina

$$D \triangleq \frac{d}{dt},$$

entonces la ecuación (47) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+...+a_1D+a_0)y(t) = (b_0+...+b_mD^m)u(t)$$

o equivalentemente

$$y(t) = \frac{b_0 + ... + b_mD^m}{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0}u(t) \quad (48)$$

Considérese la entrada $u_1(t)$ al sistema con salida correspondiente $y_1(t)$:

$$y_1(t) = \frac{b_0 + ... + b_mD^m}{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0}u_1(t) \quad (49)$$

Considere ahora introducir al sistema una entrada $u_2(t) = u_1(t-\tau)$:

$$y_2(t) = \frac{b_0 + ... + b_m D^m}{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0} u_2(t) =$$

$$= \frac{b_0 + ... + b_m D^m}{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0} u_1(t-\tau) \quad (50)$$

Considere ahora la ecuación (49) recorrida en el tiempo:

$$y_1(t-\tau) = \frac{b_0 + ... + b_m D^m}{D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0} u_1(t-\tau).$$

Se puede observar que

$$y_2(t) = y_1(t-\tau)$$

por lo que concluímos que el sistema es invariante en el tiempo.

Remark 17 *Es importante hacer notar que el sistema es invariante en el tiempo porque los coeficientes de la ecuación son todos constantes. Si éstos son funciones del tiempo, el sistema es variante en el tiempo.*

En lo que respecta a causalidad, ésta queda determinada por los valores que se le den a la variable tiempo. Para hacer explícito que el sistema es causal, se añadiría en la ecuación (47) que es válida para toda $t \geq 0$.

En lo relativo a estabilidad, es conveniente referirse a la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación (47). Previo a este análisis de estabilidad, obtengamos la relación que el modelo de la ecuación (47) tiene con el modelo de respuesta al impulso y con el de función de transferencia.

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (47) con $u(t) = \delta(t)$ (una delta de Dirac) y considerando condiciones iniciales nulas, se tiene:

$$Y(s) = \frac{b_0 + ... + b_m s^m}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} U(s)$$

pero $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$, así que

$$Y(s) = \frac{b_0 + ... + b_m s^m}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} = \tag{51}$$

$$= H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

y ya se sabe que

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b_0 + ... + b_m s^m}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}\right] \qquad (52)$$

Una vez obtenida la relación entre el modelo de la ecuación (47) y las representaciones de la planta por su respuesta al impulso y la función de transferencia, procederemos a, en base a la respuesta al impulso del sistema representado por la ecuación (47), determinar su estabilidad.

De la ecuación (52), podemos escribir lo siguiente:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b_0 + ... + b_m s^m}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}\right]$$

pero para facilitar la transformación inversa, expandemos en fracciones parciales a $H(s)$:

$$\frac{b_0 + ... + b_m s^m}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} =$$

$$= \frac{(s - z_1) \dots (s - z_l)^\nu \dots (s - zk) \left(s - \bar{z}k\right) \dots (s - z_m)}{(s - p_{1)} \dots (s - p_{k)^\nu} \dots (s - \bar{p}_{q)} (s - p_q) \dots (s - p_n)} = \tag{53}$$

$$= \frac{A_1}{(s - p_{1)}} + ... + \frac{A_\nu}{(s - p_{k)^\nu}} + ... + \frac{A_q}{(s - \bar{p}_q)} +$$

$$+ \frac{A_q}{(s - p_q)} + ... \frac{A_n}{(s - p_n)}$$

Tomando la transformada inversa de la ecuación (53) tenemos

$$h(t) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A_1}{(s - p_{1)}} + ... + \frac{A_k}{(s - p_{k)^\nu}} + ... + \frac{A_q}{(s - \bar{p}_q)} + \right.$$

$$+\frac{A_q}{(s-p_q)}+...\frac{A_n}{(s-p_n)}\Bigg]=$$

$$=A_1e^{p_1t}+...+t^{\nu}A_ke^{p_kt}+...+\overline{A}_qe^{\overline{p}_qt}+A_qe^{p_qt}+...+A_ne^{p_nt} \qquad (54)$$

De esta última expresión vemos que la respuesta al impulso del sistema es una suma de señales exponenciales, en donde los elementos $\overline{A}_q$ y $\overline{p}_q$, denotan complejos conjugados. Si se requiere que el sistema sea estable, debemos pedir que la respuesta al impulso $h(t)$, sea una señal absolutamente integrable. Para esto se requiere que todas las exponenciales que componen a $h(t)$ en la expresión (54) sean exponenciales decrecientes y una condición necesaria y suficiente para ello es que todas las raíces

$$p_1, ..., p_k, ...p_q, \overline{p}_q, p_n$$

del polinomio característico de la función de transferencia, tengan parte real negativa.

Resumiendo, dada la ecuación diferencial (47), una condición necesaria y suficiente para que el sistema representado por ella sea BIBO estable, es que el polinomio $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$ (el polinomio característico del sistema) tenga todas sus raíces (polos de la función de transferencia correspondiente) del lado izquierdo del plano complejo.

Remark 18 *En este momento, cabe destacar la importancia del número n. n es el orden de la ecuación diferencial, es también el número de condiciones iniciales requeridas para resolverla, y es también el grado del polinomio característico de la función de transferencia correspondiente.*

Por el momento se tienen ya tres modelos de los sistemas lineales y la relación entre ellos: La respuesta al impulso del sistema lineal, la función de transferencia respectiva y la ecuación diferencial correspondiente.La relación entre estas tres representaciones queda establecida por las siguientes expresiones:

Dada la ecuación diferencial siguiente con condiciones iniciales nulas

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_0 u(t) + ... + b_p \frac{d^m u(t)}{dt^m},$$

la función de transferencia correspondiente es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + ... + b_p s^p}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

y la respuesta al impulso respectiva es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b_0 + ... + b_m s^m}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}\right]$$

En la siguiente sección se propondrá un cuarto modelo para los sistemas lineales. Este cuarto modelo es el modelo de espacio de estado y es su estudio en lo que consistirá el resto del curso.

6. Modelo de Espacio de Estado

A continuación presentaremos otro modelo más para los sistemas lineales. El modelo que presentaremos a continuación se denomina *modelo de espacio de estado.*

6.1. Variables de Fase

Sea la ecuación difrencial lineal homogénea (47) :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+...+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=b_0 u(t)\ , \tag{55}$$

$$y(0) = y_0, ..., \overset{(n-1)}{y}(0) = \overset{(n-1)}{y_0}$$

se quiere reescribir esta ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para tal efecto hacemos las siguientes definiciones:

$$x_1(t) \triangleq y(t)$$

$$\dot{x}_1(t) \triangleq x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt},\ x_1(0) = x_{1_0}$$

$$\dot{x}_2(t) \triangleq x_3(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2},\ x_2(0) = x_{2_0}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \tag{56}$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) \triangleq x_n(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}},\ x_{n-1}(0) = x_{{n-1}_0}$$

finalmente, se puede ver de la ecuación diferencial que

$$\dot{x}_n = \frac{d^n y(t)}{dt^n} =$$

$$= -a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} - ... - a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t) + b_0 u(t) =$$

$$= -a_{n-1}x_n(t) - ... - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t),\ x_n(0) = x_{n_0}$$

Reescribiendo este conjunto de ecuaciones tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t), \\ \dot{x}_1(t) & = & x_2(t), \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \dot{x}_{n-1}(t) & = & x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) & = & -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - ... - a_{n-1}x_n(t) + b_0 u(t), \end{array} \tag{57}$$

con

$$x_1(0) = x_{1_0},\ x_2(0) = x_{2_0}, ..., x_{n-1}(0) = x_{n-1_0},\ x_n(0) = x_{n_0}$$

Se puede seleccionar una variable de salida. Por costumbre se emplea la letra y para denotar la salida, que desafortunadamente coincide con la variable que se ha empleado en la ecuación diferencial (55), pero que no necesariamente es la variable de la ecuación diferencial. La variable de salida puede ser

$$y(t) = x_1(t), \text{ o } y(t) = x_2(t), \text{o } ..., y(t) = x_n(t)$$

o una combinación lineal de las variables $x_i(t)$.

Supóngase que la variable de salida de interés es la variable $x_1(t)$. Se puede reescribir este conjunto de ecuaciones lineales de primer orden, con la variable de salida $y(t) = x_1(t)$ en forma matricial de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{58}$$

en donde $A \in \mathcal{R}^{n*n}$, $B \in \mathcal{R}^{n*1}$, $C \in \mathcal{R}^{1*n}$, $x(t) \in \mathcal{R}^{n}$, $u(t) \in \mathcal{R}$, $y(t) \in \mathcal{R}$, están dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & . & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ b_0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}.$$