Capítulo
Uno

CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo se hará un breve repaso de los conceptos básicos de la Teoría de Sistemas Necesarios para entender las bases de la Teoría del Control.

Definiciones básicas

Existen tres conceptos básicos en la Teoría del Control, que es necesario definir para el buen entendimiento del material de este curso. Estos conceptos son:

- Planta o Proceso
- Modelo
- Sistema Dinámico

Planta o Proceso

Planta o proceso, es la realidad con la que va a trabajar el ingeniero en control.

Esta definición es muy general, pero abundando, planta o proceso es cualquier ente que se encuentra en la naturaleza y que responde a estímulos. El cuerpo humano o partes de él pueden considerarse plantas, pues responden a estímulos. Una mesa, que responde con una fuerza igual pero de sentido opuesto al peso que se le pone encima y lo sostiene, también puede considerarse una planta. Debe notarse que lo que puede considerarse un estímulo y la respuesta de la planta a ese estímulo, dependen del observador, que es el ingeniero en control.

Las plantas pueden clasificarse de acuerdo al tipo de estímulos y respuestas que relacionan y se puede hablar entonces de plantas físicas, químicas, biológicas, sociales, etc. Lo importante en este concepto es que la planta concebida así, es el ente real que convierte estímulos o entradas, en salidas o respuestas a esos estímulos.

Modelo

Un modelo es cualquier abstracción de la realidad. Es cualquier abstracción que se realiza de una planta o proceso.

Dicho de otra manera, un modelo es un esquema teórico por el que se separan por medio de una operación intelectual, las cualidades de una realidad compleja o planta, para considerarlas aisladamente o para considerar la misma planta en su esencia o noción para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento y posterior manipulación. Desde este punto de vista, cualquier abstracción que se hace de cualquier planta o proceso, es un modelo. Una vez que se tiene un modelo, es conveniente manipular el modelo en lugar de la planta misma para ensayar en éste la respuesta que aquella tendría a cierto estímulo. La naturaleza de los modelos puede ser de diferente índole. Así se tienen modelos pictóricos, psicológicos, biológicos, matemáticos, etc. En estos apuntes en particular, se tratará con modelos matemáticos.

Sistema

Sistema es el modelo matemático de una planta o proceso, que satisface los axiomas de Kalman (R. E. Kalman, 1969).

Por el momento bastará con saber que un sistema es un modelo matemático "muy especial", en donde el concepto o propiedad básica es el de dinámica. La definición axiomática de sistema dada por Kalman es la que se adoptará en estas notas.

El empleo de la palabra sistema para denotar indistintamente a un modelo matemático que cumple con los axiomas de Kalman o a una planta, es común. Sin embargo es conveniente tener claro cuando se habla de uno o de la otra.

Se puede pensar en un sistema S como un mapeo de un universo de entradas o estímulos $\mathcal{X}$ a un universo de respuestas o salidas $\mathcal{Y}$. Esto es,

$$S: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

$$y = S(X) \quad x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}$$

O alternativamente:

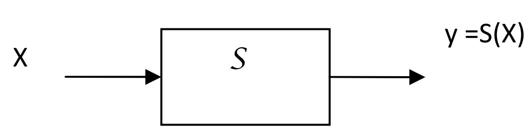
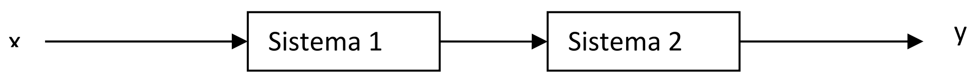


Figura 1. Sistema

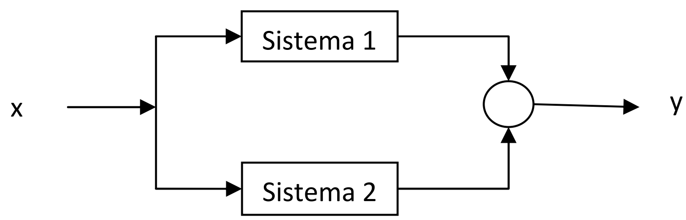
Las entradas o estímulos y las respuestas o salidas se denominarán alternativamente señales de entrada y de salida respectivamente, del sistema dinámico en cuestión.

Interconexión de sistemas

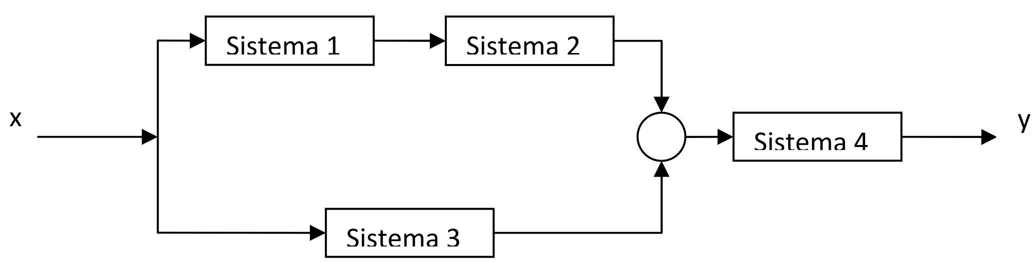
Existen dos formas básicas de interconexión de sistemas. La conexión serie o cascada:



La conexión paralelo:



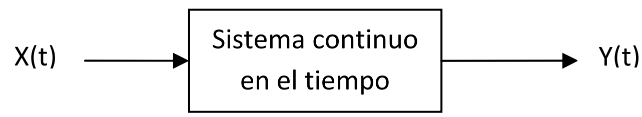
Cualquier otra interconexión de sistemas, es una combinación de estos dos tipos de conexión, como la conexión serie-paralelo:



De acuerdo al tipo de señales que procesan, los sistemas se pueden clasificar como continuos o discretos:

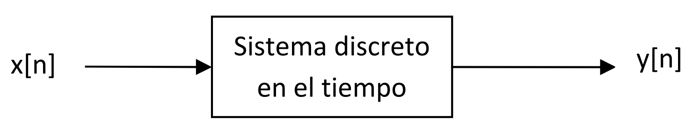
Sistema Continuo en el tiempo

Es aquel que procesa señales de entrada continuas en el tiempo en señales de salida continuas en el tiempo, i.e. $x(t) \rightarrow y(t)$. Gráficamente:



Sistema discreto en el tiempo

Similarmente, un sistema discreto en el tiempo o simplemente discreto, es aquél que transforma señales de entrada discretas en el tiempo, en señales de salida discretas en el tiempo. i.e. x[n]→y[n]. Gráficamente:



Existen sistemas que procesan señales tanto continuas como discretas. A estos sistemas se les conoce como híbridos. En estas notas no se abordará esa clase de sistemas.

Estas notas tratan en particular con sistemas dinámicos como los define Kalman. En lugar de introducir la noción de sistema dinámico a través de la definición axiomática de Kalman, se prefiere introducirla a través de las características o propiedades de los sistemas dinámicos, que no son otra cosa que la modelización de las características que se observan en las plantas. A continuación se introducirá el concepto de sistema dinámico a través de sus características.

Características generales de los Sistemas

En esta sección se abordarán las características generales de los sistemas.

Sistemas con memoria (dinámicos) y sin memoria (estáticos).

Se dice que un sistema es estático o sin memoria si su salida en cualquier instante de tiempo depende solamente de entradas en ese mismo instante de tiempo.

Si el sistema no es estático, se denomina dinámico o con memoria. Esto es, un sistema dinámico es aquel cuya salida en un instante de tiempo dado, depende de entradas en otros instantes de tiempo y posiblemente (no necesariamente) de entradas en ese mismo instante de tiempo.

Estrictamente hablando, no existen en la naturaleza plantas cuya respuesta sea instantánea. Sin embargo, dependiendo de la naturaleza de las mismas y de la escala de tiempo involucrada, puede ser conveniente modelarlas como sistemas estáticos.

Ejemplos

El sistema

$$y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$$

Es un sistema sin memoria porque y[n], el valor de la salida en el instante "n", depende únicamente del valor de la entrada en ese mismo instante de tiempo, esto es de x[n] únicamente.

Similarmente, un resistor eléctrico, tomada la corriente como la entrada y la caída de voltaje a su través, es un sistema estático

$$y(t) = Rx(t)$$

Porque la salida en el instante "t", depende únicamente de la entrada en ese mismo instante "t".

El sistema identidad:

$$y(t) = x(t)$$

$$y[n] = x[n]$$

Es también un sistema estático.

Sin embargo, los siguientes sistemas son sistemas con memoria o dinámicos, porque la salida y, depende de la entrada x en diferentes instantes de tiempo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = x(t-1)$$

El capacitor es también un sistema dinámico:

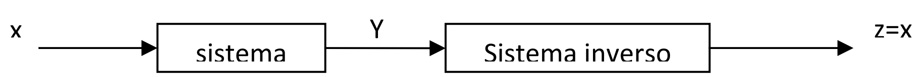
$$y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

El concepto de la dinámica de un sistema es crucial en la teoría de sistemas.

Invertibilidad y sistemas inversos

Se dice que un sistema es invertible si a distintas entradas les corresponden distintas salidas. Dicho de otra manera, un sistema es invertible si mediante la observación de sus salidas, se pueden determinar sin ambigüedad sus entradas.

Si un sistema es invertible, se puede construir un sistema tal que conectado en cascada con el sistema original, reproduzca la entrada al sistema. A este último sistema que conectado en cascada con el original reproduce la entrada, se le denomina sistema inverso.



Ejemplos

Ejemplos de sistemas invertibles:

Sistema: $y(t) = 2x(t)$

Sistema inverso: $z(t) = \frac{1}{2}y(t)$

Sistema: $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Sistema inverso: $$z[[n] = y[n] - y[n-1]$$

En el último ejemplo puede verificarse que efectivamente sustituyendo a $y[n]$ y a $y[n-1]$, se obtiene precisamente el valor de x que es la entrada al sistema.

Los siguientes son ejemplos de sistemas no invertibles:

$$y[n] = 0$$

$$y(t) = x^2(t)$$

Causalidad

Se dice que un sistema es causal si su señal de salida en cualquier instante de tiempo depende solamente de entradas en ese instante de tiempo y/o de entradas en instantes anteriores.

A los sistemas causales también se les llama no anticipativos, ya que los valores de la señal de salida, no se anticipan a valores futuros de la señal de entrada. Consecuentemente, si dos señales de entrada a un sistema causal son idénticas hasta algún instante de tiempo t_0 (n_0) dado, las señales de salida correspondientes también deben ser iguales hasta ese instante de tiempo.

Ejemplos

Ejemplos de sistemas causales:

$$y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$$

Los siguientes son ejemplos de sistemas no causales o anti-causales:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$y(t) = x(t-1)$$

Estrictamente hablando, en la naturaleza no se observan fenómenos o plantas no causales o anticipativas. Sin embargo, los sistemas no causales son útiles en algunas aplicaciones como el procesamiento de imágenes, en el cual la variable independiente no es el tiempo. También son útiles en el procesamiento de datos en los que la variable tiempo es la variable independiente, pero que han sido previamente grabados, situaciones en las que el procesamiento de los datos no está restringido a ser un procesamiento causal de los mismos. Ejemplos de estas situaciones son el procesamiento de datos de voz, datos geológicos, etc.

Estabilidad

Se definirán a continuación, de manera informal, los conceptos de estabilidad de Lyapunov y de estabilidad BIBO de los puntos de equilibrio de un sistema. Existen varias definiciones de la estabilidad de un punto de equilibrio, sin embargo, el concepto es el mismo. Todas estas definiciones resultan ser equivalentes o unas implican a las otras.

Punto de equilibrio

Se denomina punto de equilibrio de un sistema dinámico la situación en la que la variable de interés permanece constante o es nula, y en consecuencia, todas sus derivadas con respecto al tiempo, son iguales a cero.

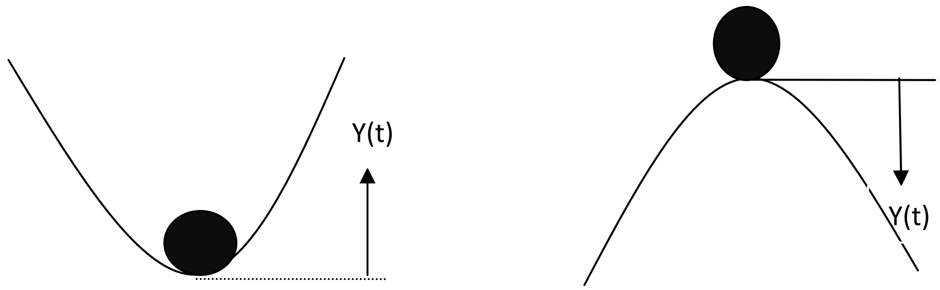
Más adelante se hablará otra vez de lo que es un punto de equilibrio y se dará una definición más rigurosa cuando se trate con ecuaciones diferenciales para describir a los sistemas dinámicos.

Estabilidad desde el punto de vista de Lyapunov

Sea un punto de equilibrio de un sistema dinámico. El punto de equilibrio se dice que es estable si cuando se perturba al sistema en una vecindad del punto de equilibrio, y se deja evolucionar libremente al sistema, éste regresa al punto de equilibrio o permanece en una vecindad de éste. Si por el contrario, el sistema se aleja del punto de equilibrio, el punto de equilibrio se denomina inestable.

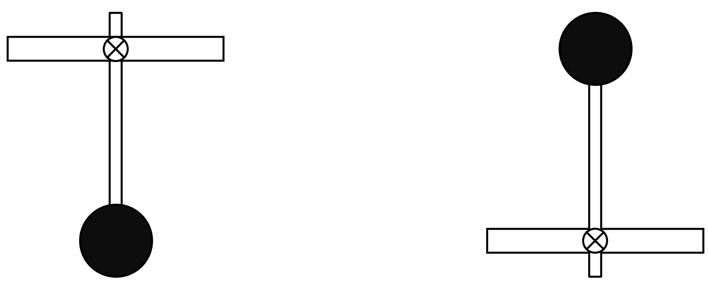
En la siguiente figura se representan los puntos de equilibrio de dos sistemas diferentes.

Suponga que las superficies cóncava y convexa respectivamente, son superficies de paredes infinitas y que sobre ellas rueda una pelota.



En el primer caso, si el sistema se perturba alrededor del punto de equilibrio, esto es, si la pelota se coloca en una posición inicial en la vecindad del punto de equilibrio mostrado y se deja evolucionar al sistema libremente, la pelota regresará eventualmente al punto de equilibrio en el cual $y = 0$, mientras que en el segundo caso, la pelota se alejará del punto de equilibrio y $y(t) \to \infty$. Así que el punto de equilibrio en el primer caso es estable y en el segundo caso es inestable.

En general los sistemas dinámicos tienen más de un punto de equilibrio, como puede observarse en el siguiente sistema que representa un péndulo con sus dos puntos de equilibrio, el primero de los cuales es estable y el segundo inestable:



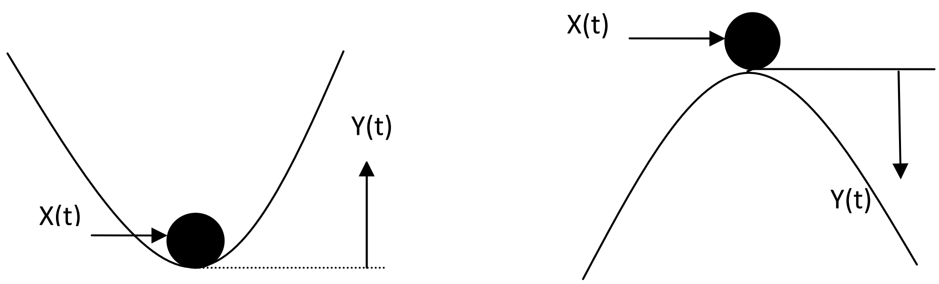
Es conveniente dar una definición alternativa de estabilidad. El concepto que a continuación se expone está incluido en la definición anterior, pero permite obtener de manera sencilla condiciones necesarias para la estabilidad de un punto de equilibrio.

Estabilidad BIBO(Bounded input bounded output)

Un sistema se denomina BIBO estable cuando a entrada acotada se tiene una salida acotada.

Cuando se habla de señales acotadas, se hace referencia al tamaño o magnitud de las señales, así que cuando se dice que la señal $x(t)$ es acotada, esto quiere decir que $|x(t)| \leq M < \infty$.

En referencia a las figuras anteriores, supóngase ahora que el sistema permanece en su punto de equilibrio, pero que se introduce una entrada $x(t)$ que puede ser un desplazamiento. Supóngase que el desplazamiento es pequeño, es decir, se introduce una entrada acotada. Es claro que en el caso de los puntos de equilibrio estables, la salida $y(t)$ correspondiente se mantendrá acotada. En el caso de los puntos de equilibrio inestables, a entrada acotada, se tiene una salida exageradamente grande en magnitud y en el caso de la superficie cóncava, si las paredes son infinitas, la respuesta es infinita.



Ejemplos

El siguiente es un ejemplo de un sistema BIBO estable:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$$

El sistema es un promediador. El promedio siempre es mayor que el menor elemento y menor que el mayor elemento, por lo que si $|x[n]| \leq C < \infty$, es claro que $|y[n]| < \infty$.

El siguiente es un ejemplo de un sistema BIBO inestable:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Este sistema es un sumador o acumulador. Es claro que si por ejemplo $x[k] = 1, \forall\ k$, que es una señal acotada, el sumador dará como resultado $|y[n]| = \infty$ y por lo tanto se trata de un sistema BIBO inestable.

Invariancia en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo o simplemente invariante, si un corrimiento en el tiempo en la señal de entrada causa el mismo corrimiento en el tiempo, de la señal de salida del sistema.

Específicamente, si $y(t)$ $(y[n])$ es la salida de un sistema continuo (discreto) cuando la entrada es $x(t)$ $(x[n])$, entonces $y(t-t_0)$ $(y[n-n_0])$ es la salida cuando se aplica la señal de entrada $x(t-t_0)$ $(x[n-n_0])$.

Ejemplos

Considérese el siguiente sistema:

$$y(t) = sen(x(t))$$

Este sistema es invariante en el tiempo, porque para la entrada $x_1(t)$ la salida correspondiente es

$$y_1(t) = sen(x_1(t))$$

Considérese ahora la entrada $x_2(t) = x_1(t-t_0)$ cuya salida correspondiente es entonces

$$y_2(t) = sen(x_2(t)) = sen(x_1(t-t_0))$$

Pero es claro que

$$y_1(t-t_0) = sen(x_1(t-t_0)), \text{ así que}$$

$$y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

Lo cual implica, que de acuerdo a la definición el sistema es invariante en el tiempo.

Considérese el siguiente sistema discreto:

$$y[n] = nx[n]$$

Considere las respuestas del sistema a las entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, donde $x_2[n] = x_1[n-n_0]$:

$$y_1[n] = nx_1[n]$$

$$y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n-n_0]$$

Si se desplaza la salida $y_1[n]$ un tiempo n_0, se obtiene

$$y_1[n-n_0] = [n-n_0]x[n-n_0] \neq y_2[n]$$

Lo que indica, de acuerdo a la definición, que el sistema es variante en el tiempo.

Linealidad

A continuación se dará la definición de lo que se entiende por *sistema lineal*. Este concepto es muy importante, porque estos apuntes tratan con sistemas lineales, para los cuales existe una teoría

Sistema Lineal

Un sistema lineal es aquél que cumple con los principios de superposición y de homogeneidad.

Principio de Superposición

Sea $y_i(t)(y_i[n])$ la señal de salida de un sistema correspondiente a la entrada $x_i(t)(x_i[n])$. Se dice que un sistema satisface el principio de superposición si al aplicarle la entrada

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l} x_k(\mathrm{t})$$

$$\left(x[n] = \sum_{k=1}^{l} x_k[\mathrm{n}]\right)$$

La salida correspondiente es

$$y(t) = \sum_{k=1}^{l} y_k(\mathrm{t})$$

$$\left(y[n] = \sum_{k=1}^{l} y_k[\mathrm{n}]\right)$$

Principio de Homogeneidad

Sea y(t) (y[n]) la señal de salida de un sistema correspondiente a la entrada x(t) (x[n]), y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se dice que un sistema satisface el principio de homogeneidad si al aplicársele la entrada

$$x'(t) = \lambda x(t)$$

$$(x'[n] = \lambda x[n])$$

La salida correspondiente es

$$y'(t) = \lambda y(t)$$

$$(y'[n] = \lambda y[n])$$

Es claro que si el sistema satisface el principio de Superposición, también satisface el de Homogeneidad.

Esto se verifica rápidamente cuando en la definición del principio de Superposición, se hace $y_i(t) = y(t), \forall i = \overline{1, l}\ con\ l = \lambda\ \ (y_i[n] = y[n], \forall i = \overline{1, l}\ con\ l = \lambda\ )$.

También debe ser claro que si un sistema es lineal y $y_i(t)$ ($y_i[n]$) es la señal de salida del sistema correspondiente a la entrada $x_i(t)$ ($x_i[n]$), entonces la respuesta del sistema a la entrada

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k\, x_k(t), \lambda \epsilon \mathbb{R}$$

$$\left(x[n] = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k\, x_k[n], \lambda \epsilon \mathbb{R} \right)$$

Será:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k\, y_k(t), \lambda \epsilon \mathbb{R}$$

$$\left(y[n] = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k\, y_k[n], \lambda \epsilon \mathbb{R} \right)$$

Todo aquél sistema que no es lineal, se denomina sistema no lineal.

Ejemplos

Los siguientes son ejemplos de sistemas lineales:

$$y(t) = Rx(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y[n] = 0$$

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y(t) = x(t+1)$$

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$$

$$y[n] = nx[n]$$

Los siguientes sistemas no son lineales, es decir, son sistemas no lineales:

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y(t) = sen[x(t)]$$

Sea el sistema dado por la expresión siguiente:

$$y(t) = mx(t) + b, \qquad donde\ m, b \epsilon \mathbb{R}$$

¿Es este sistema lineal o no lineal?

Para que sea lineal, debe satisfacer los principios de superposición y homogeneidad:

Sean $x_1(t)\ y\ x_2(t)$ dos entradas al sistema en cuestión. Sean $y_1(t) = mx_1(t) + b$ y

$y_2(t) = mx_2(t) + b$ las salidas correspondientes a esas entradas. Sea ahora la entrada al sistema $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. La salida correspondiente es

$$y(t) = m\big(x_1(t) + x_2(t)\big) + b = mx_1(t) + mx_2(t) + b$$

Es claro que $y(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$. Por lo tanto se concluye que el sistema es no lineal. La comprobación de que el sistema tampoco satisface el principio de homogeneidad se deja al lector.

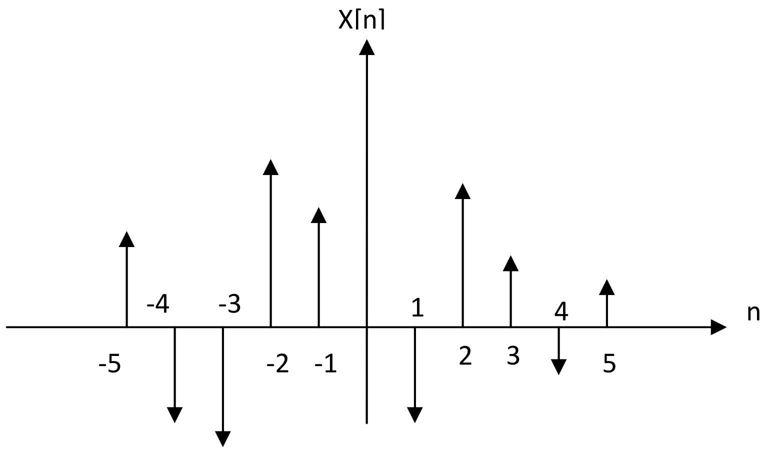
De este punto en adelante, las notas tratarán básicamente con sistemas lineales, a menos que se indique lo contrario.

Sistemas lineales y sus propiedades en términos de su respuesta al impulso.

Representación de señales en términos de impulsos

Caso Discreto

Supóngase que se tiene la siguiente señal discreta:



Defina a δ[n] de la siguiente manera:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Se trata de expresar la señal de la figura en términos de δ[n]. Para tal efecto se usará a δ[n] como apuntador. Por ejemplo, si se quiere apuntar al valor $x[-5]$, basta con escribir:

$$x[n] = x[-5]\delta[n+5]$$

Y hacer n=-5. De manera análoga, para apuntar al valor $x[3]$, basta con escribir

$$x[n] = x[3]\delta[n-3]$$

Y hacer n=3. Continuando con este razonamiento, la señal de la figura puede expresarse en términos de δ[n], de la siguiente manera:

$$x[n] = \begin{cases} \ldots x[-5]\delta[n+5] + x[-4]\delta[n+4] + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + \\ x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \\ +x[4]\delta[n-4] + x[5]\delta[n-5] + \cdots \end{cases}$$

O de manera abreviada, x[n] puede escribirse de la siguiente manera:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Esta última expresión se conoce como la propiedad de corrimiento del impulso unitario δ[n]. La operación matemática de esta última expresión se conoce como convolución y se denota por:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$$

No es difícil ver que el mismo resultado se obtiene si x[n] se expresa de la siguiente manera:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]x[n-k] = \delta[n] * x[n]$$

La manera sencilla de ver que esta expresión es correcta, es expandiendo los términos de la sumatoria. Esto indica que la operación de convolución es conmutativa.

Si se ve a la convolución como un operador, se puede comprobar que además de conmutar, el operador convolución es un operador lineal: Sea $x[n] = \lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n]$, entonces

$$x[n] * \delta[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n])\delta[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_1 x[k]\delta[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_1 x[k]\delta[n-k] = \lambda_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[n]\delta[n-k]$$
$$+ \lambda_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[n]\delta[n-k] = \lambda_1 x_1[n] * \delta[n] + \lambda_2 x_2[n] * \delta[n]$$

Con lo que se demuestra que el operador convolución, es un operador lineal.

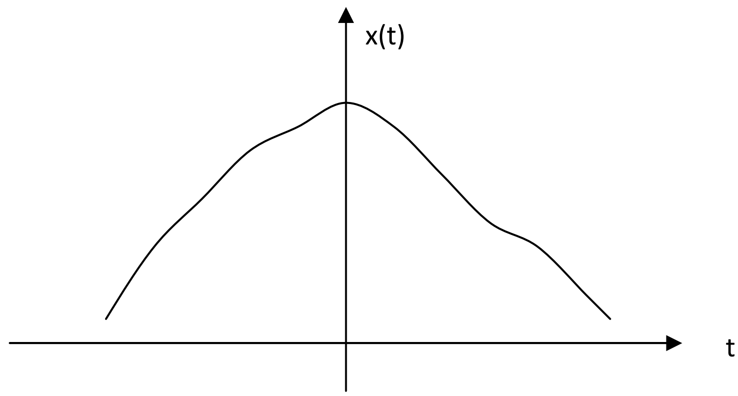
El resultado anterior se conoce como la ***propiedad de corrimiento de la delta de Dirac***: la convolución de cualquier señal con una delta de Dirac da como resultado la misma señal.

Se deja al lector investigar a qué es igual la convolución de una señal con una delta de Dirac corrida en el tiempo, i.e.

$$x[n] * \delta[n-n_0] =?$$

Caso continuo

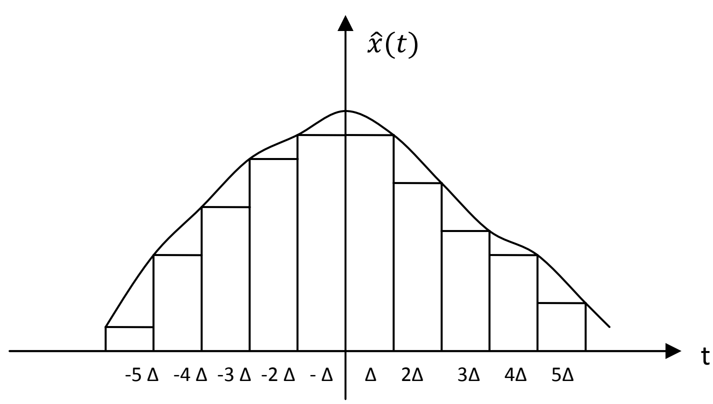
Supóngase que se tiene la siguiente señal continua en el tiempo, que es también Riemann integrable:



Defina a $\delta_{\Delta}(t)$ de la siguiente manera:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} \ , & 0 \leq t < \Delta \\ 0 \ \ \mathit{para\ cualquier} \\ \quad \mathit{otro\ tiempo} \end{cases}$$

Se puede obtener una "versión escalera" de esta señal continua como se muestra a continuación:



Como se ha supuesto que la señal es Riemann integrable, para el análisis que se va a efectuar, no importa si la versión escalera es escalera superior o inferior. En la gráfica se muestra la versión escalera inferior.

Empleando el mismo tipo de razonamiento que en el caso discreto, ahora en lugar de apuntar a instantes de tiempo, se apunta a alguno de los intervalos de ancho Δ y entonces se puede escribir lo siguiente:

$$\hat{x}(t) = \cdots + x(-4\Delta)\delta_{\Delta}(t+4\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} + x(-3\Delta)\delta_{\Delta}(t+3\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} + x(-2\Delta)\delta_{\Delta}(t+2\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} +$$

$$x(-\Delta)\delta_{\Delta}(t+\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} + x(0)\delta_{\Delta}(t)\mathit{\Delta} + x(\Delta)\delta_{\Delta}(t-\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} +$$

$$x(2\Delta)\delta_{\Delta}(t-2\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} + x(3\Delta)\delta_{\Delta}(t-3\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} + x(4\Delta)\delta_{\Delta}(t-4\mathit{\Delta})\mathit{\Delta} + \cdots$$

O de manera abreviada $\hat{x}(t)$ puede escribirse como:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_{\Delta}(t-k\mathit{\Delta})\Delta$$

Obsérvese que esta expresión es muy similar a la obtenida anteriormente para el caso discreto. Empleando los mismos argumentos que para el caso discreto, es fácil verificar que para esta expresión de $\hat{x}(t)$ también se tiene conmutatividad de los argumentos y linealidad respecto a ellos. Procédase ahora a tomar límites de estas últimas expresiones cuando $\mathit{\Delta}$ tiende a cero:

$$\lim_{\Delta\to 0} \delta_{\Delta}(t)\,\Delta = \delta(t)$$

Y también

$$\lim_{\Delta\to 0} \hat{x}(t) = x(t)$$

Entonces

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_{\Delta}(t-k\mathit{\Delta})\Delta =$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Esta última expresión denota la propiedad de corrimiento de la delta de Dirac $\delta(t)$. La operación indicada en esta última expresión es la convolución que se denota por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$

Como en el caso discreto, es fácil ver que el operador convolución es lineal respecto a sus dos argumentos y que además conmuta. Así que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = \delta(t) * x(t)$$

Como en el caso discreto, la convolución de una delta de Dirac con cualquier señal continua en el tiempo, da por resultado la misma señal.

Se deja al lector la tarea de corroborar que la convolución de una señal con una delta de Dirac corrida en el tiempo resulta en la misma señal corrida en el tiempo:

$$x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$$

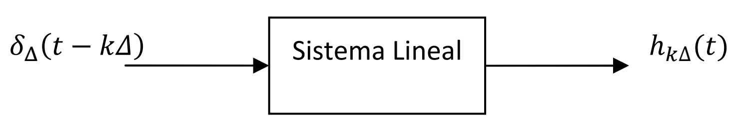
La Integral (Sumatoria) de Convolución

Este resultado es importante porque lo que se va a mostrar es que la respuesta al impulso de un sistema lineal, es suficiente para caracterizar su respuesta a un buen número de señales.

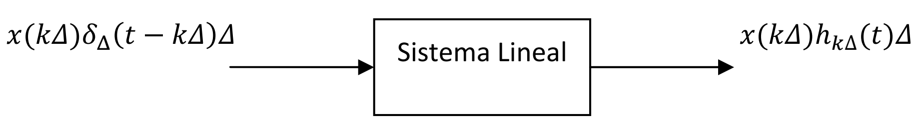
Se iniciará con el caso continuo. El desarrollo del caso discreto, es muy similar al del caso continuo antes de tomar límites, como se mostrará a continuación.

La Integral de Convolución

Supóngase que se tiene un sistema lineal continuo cuya respuesta a la señal de entrada $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ es $h_{k\Delta}(t)$, esto es:



Como el sistema es lineal, por el principio de homogeneidad se tiene que:



Y por la propiedad de superposición:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow \boxed{\text{Sistema Lineal}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta$$

Si ahora se toman límites tanto en la entrada como en la salida del sistema, cuando $\Delta \to 0$, se tiene que la respuesta del sistema lineal a la entrada

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

Es la señal de salida

$$y(t) = \lim_{\Delta\to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta$$

Pero

$$\begin{aligned} k\Delta &\to \tau, \qquad cuando\ \Delta \to 0 \\ \Delta &\to d\tau, \qquad cuando\ \Delta \to 0 \\ \lim_{\Delta\to 0} \delta_{\Delta}&(t)\,\Delta = \delta(t) \end{aligned}$$

La sumatoria tiende a una integral de Riemann cuando $\Delta \to 0$

Por otro lado cabe mencionar que cuando $\Delta \to 0$, $h_{k\Delta}(t) \to h_{\tau}(t)$. $h_{\tau}(t)$ es la respuesta del sistema lineal a la entrada $\delta(t-\tau)$, que es una delta de Dirac corrida en el tiempo, por lo que finalmente se puede escribir lo siguiente:

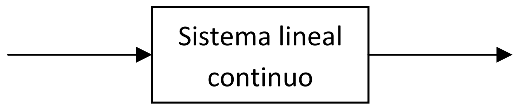
Sea un sistema lineal continuo con respuesta $h_{\tau}(t)$ a la entrada $\delta(t-\tau)$. Sea $x(t)$ una señal de entrada cualquiera, la salida $y(t)$ correspondiente está dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau$$

La única condición que debe imponerse sobre las señales involucradas en la integral anterior es que sean tales que dicha integral exista, es decir, que converja.

Como puede observarse de esta expresión, la señal $h_{\tau}(t)$ caracteriza la respuesta del sistema lineal continuo a cualquier entrada $x(t)$, esto es:

$x(t)$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau$$

$$= x(t) * h_\tau(t)$$

Si además de ser lineal, el sistema es invariante en el tiempo, es claro que

$$h_\tau(t) = h(t - \tau)$$

Y la respuesta $y(t)$ del sistema puede escribirse como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

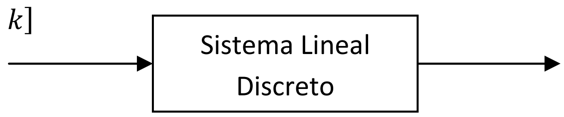
A esta última expresión se reconoce como la ***integral de convolución***.

La Sumatoria de Convolución

El caso discreto es muy similar al continuo. Basta con repetir el razonamiento anterior sustituyendo a $k\Delta$ por k, a t por n , a $h_{k\Delta}(t)$ por $h_k[n]$ y a $\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta$ por $\delta[n - k]$.

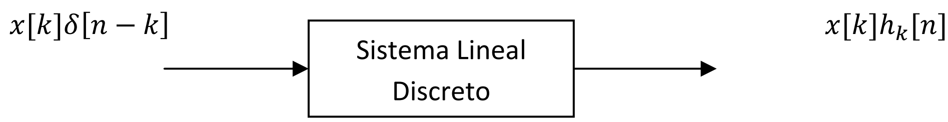
Sea $\delta[n - k]$ una delta de Dirac corrida en el tiempo, la entrada a un sistema lineal discreto y sea $h_k[n]$ la respuesta correspondiente:

$\delta[n - k]$

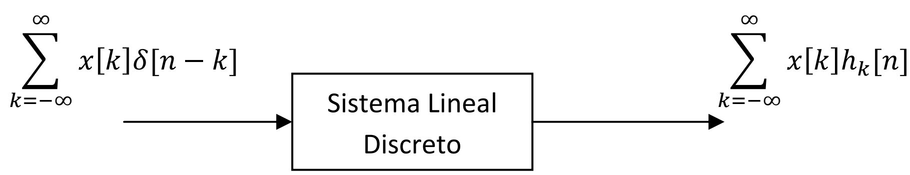


$h_k[n]$

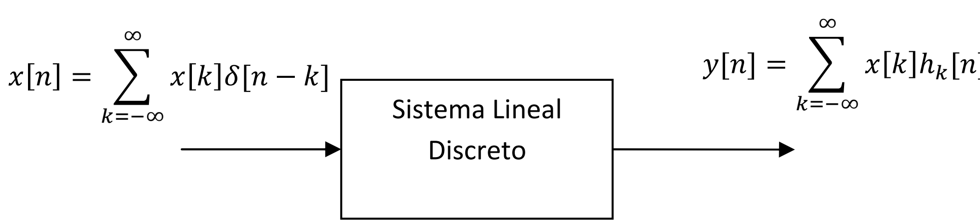
Por el principio de homogeneidad, se tiene que si ahora se multiplica esta entrada por $x[k]$, la salida también deberá multiplicarse por este mismo factor



Por el principio de superposición, si se introduce al sistema una suma de entradas, la salida correspondiente será la suma de las salidas correspondientes a esas entradas, entonces se tiene:



Pero esta entrada es igual a la convolución de $x[n]$ con $\delta[n]$ que es igual a $x[n]$. Así que finalmente se tiene que



Así que si la entrada a un sistema lineal discreto es $x[n]$, la salida correspondiente es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

En donde $h_k[n]$ es la respuesta del sistema a la entrada $\delta[n-k]$. De manera similar al caso continuo, si el sistema es invariante en el tiempo, entonces

$$h_k[n] = h[n-k]$$

En donde $h[n]$es la respuesta del sistema a la entrada $\delta[n]$. En este caso, el resultado es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \triangleq x[n] * h[n]$$

A esta última expresión se le conoce como ***sumatoria de convolución***

Propiedades de la convolución

La convolución tiene las siguientes propiedades:

- P1 Conmutatividad
  $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$ $(h[n] * x[n] = x[n] * h[n])$

- P2 Asociatividad
  $(h_2(t) * h_1(t)) * x(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t))$
  $((h_2[n] * h_1[n]) * x[n] = h_2[n] * (h_1[n] * x[n])$

- P3 Distributividad
  $[h_1(t) + h_2(t)] * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$
  $([h_1[n] + h_2[n]] * x[n] = h_1[n] * x[n] + h_2[n] * x[n])$

Estas propiedades se pueden verificar a partir de la definición de la convolución. Se puede también verificar la linealidad de la convolución respecto a ambos argumentos:

$$h(t) * [\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 h(t) * x_1(t) + \lambda_2 h(t) * x_2(t)$$

Análogamente se puede verificar su linealidad respecto a $h(t)$ y para el caso discreto, esta tarea se deja al lector.

Implicaciones de las propiedades de la convolución

Respecto a la propiedad P1

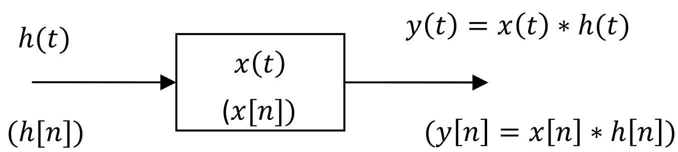
La Respuesta al Impulso de los sistemas lineales como modelo de éstos

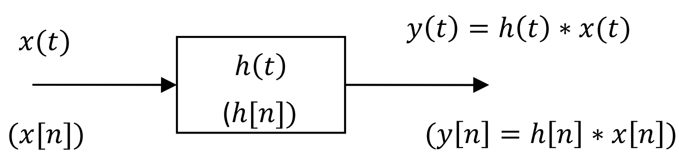
Las expresiones obtenidas para la salida de un sistema lineal a partir de una entrada cualquiera, fueron las siguientes:

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \text{ (caso continuo)}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = x[n] * h[n] \text{ (caso discreto)}$$

De estas expresiones es claro, como ya se mencionó, que la salida del sistema es la acción del mismo sobre la entrada, así que el sistema desempeña el papel de mapeador u operador que transforma señales de entrada en señales de salida. Es costumbre representar situaciones como ésta colocando al operador precediendo al operando, que es la señal de entrada. Con esta óptica, la propiedad de conmutatividad de la convolución implica las siguientes situaciones que se ilustran en las siguientes figuras:





En la primera de las situaciones, cuando $y(t) = x(t) * h(t)$ $(y[n] = x[n] * h[n])$, el operador es $x(t)$ $(x[n])$ que mapea a $h(t)$ $(h[n])$ en $y(t)$ $(y[n])$. Pero esta no es la situación que se quiere describir. La situación que se desea describir es aquella en la que $x(t)$ $(x[n])$ es la señal que es mapeada. Así que la primera situación, aunque matemáticamente es correcta, se descarta. La segunda de las situaciones describe la situación deseada. En ésta $h(t)$ $(h[n])$ mapea a $x(t)$ $(x[n])$ y desempeña entonces el papel del sistema. Por esta razón, se adopta a la respuesta al impulso $h(t)$ $(h[n])$ de un sistema lineal, como un modelo de éste.

Respecto a la propiedad P2

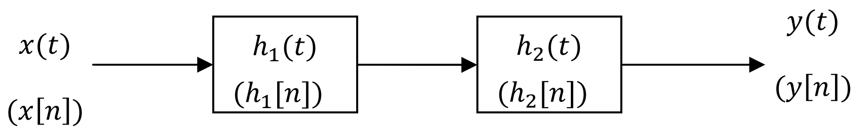
La propiedad de asociatividad de la convolución es en el caso continuo

$$(h_2(t) * h_1(t)) * x(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t))$$

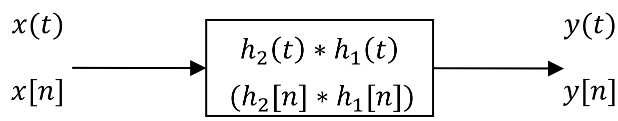
y en el caso discreto

$$((h_2[n] * h_1[n]) * x[n] = h_2[n] * (h_1[n] * x[n])$$

El lado derecho de estas expresiones implican la siguiente conexión entre sistemas:



El lado izquierdo de estas expresiones implican la siguiente conexión, equivalente a la conexión anterior:



Esto es, la conexión en cascada de dos sistemas lineales representados por sus respectivas respuestas al impulso, es equivalente a un solo sistema lineal cuya respuesta al impulso es la convolución de las respuestas al impulso de cada uno de los sistemas. Obsérvese que el orden en el que se toma la convolución de ambos sistemas es importante, porque aunque el operador convolución conmuta, las implicaciones desde el punto de vista de conexión de los sistemas no es la misma.

Respecto a la propiedad P3

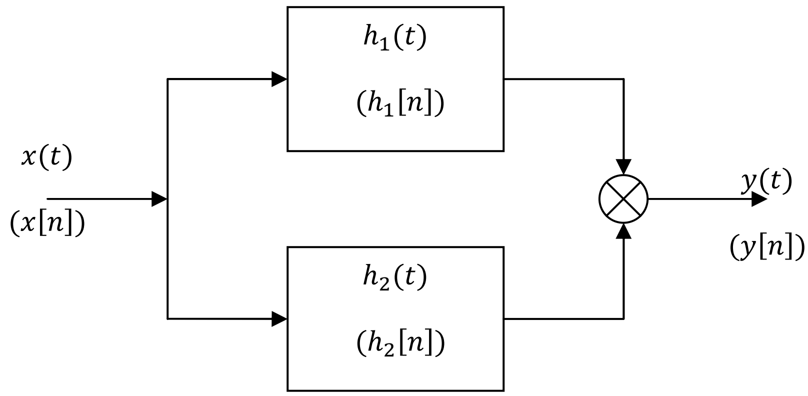
La propiedad de distributividad para el caso continuo es

$$[h_1(t) + h_2(t)] * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) ,$$

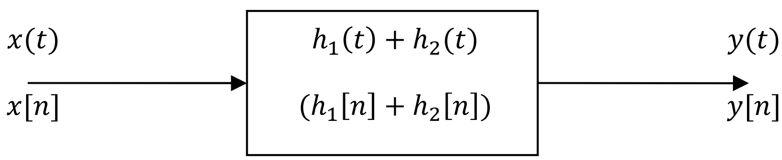
y en el caso discreto

$$[h_1[n] + h_2[n]] * x[n] = h_1[n] * x[n] + h_2[n] * x[n]$$

El lado derecho de estas expresiones implican la siguiente conexión entre sistemas:



Y la conexión equivalente a ésta, que representa al primer miembro de le expresión de la tercera propiedad, es:



De las propiedades de la convolución, es claro que se tiene un álgebra de bloques. Debe notarse que el dominio es el del tiempo y que la operación más importante es la convolución.

Propiedades de los Sistemas Lineales en términos de su respuesta al impulso

Ya que la respuesta al impulso de un sistema lineal caracteriza completamente la respuesta del sistema a cualquier otra entrada (para la cual la integral o la sumatoria de convolución converjan) y ya que por esta razón se ha tomado como primer modelo de un sistema lineal a su respuesta al impulso, es de suponerse que las propiedades del sistema lineal tales como si es dinámico o estático, si es causal, invertible, estable, etc., deben estar reflejadas en su respuesta al impulso. A continuación se repasarán las características de los sistemas en general , para el caso de los sistemas lineales, en términos de su respuesta al impulso.

Como recordatorio, se escriben a continuación la integral y la sumatoria de convolución:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

$$(x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k])$$

As seen in out_corr

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \, x_k(t), \lambda \epsilon \mathbb{R}$$

$$\left(x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right)$$

$$E = mc^2 \# [30]$$

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$

$x(t) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \, x_k(t), \lambda \epsilon \mathbb{R}$ (1)	

The initial condition is given by equation