1 Valores y Vectores Propios

Sea la matriz A siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Sean los vectores $\overline{\mathbf{x}}_1$ y $\overline{\mathbf{x}}_2$:

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Mapeénse estos dos vectores por la matriz A:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{y}}_1 &= A\overline{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{y}}_2 &= A\overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obsérvese que la matriz A mapea a estos dos vectores en dos vectores, que son los originales multiplicados por -1, en el caso de $\overline{\mathbf{x}}_1$, y por -2, en el caso de $\overline{\mathbf{x}}_2$.

Tómense los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ siguientes, paralelos, esto es, colineales a $\overline{\mathbf{x}}_1$ y $\overline{\mathbf{x}}_2$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix},\ s.t.\ a \in R$$

Estos vectores definen cada uno, un subespacio unidimensional de R^2.

Mapéense estos vectores por la matriz A :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -a \\ a \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 &= A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2a \\ 4a \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El resultado del mapeo de estos dos vectores por la matriz A, es el mismo que para los vectores $\overline{\mathbf{x}}_1$ y $\overline{\mathbf{x}}_2$. Esto es, cualquier vector que se encuentre en el subespacio unidimensional definido por $\mathbf{x}_1$ es mapeado por A en un vector que es el original multiplicado por -1 y cualquier vector que se encuentre en el subespacio unidimensional definido por $\mathbf{x}_2$ es mapeado por A en un vector que es el original multiplicado por -2.

Definición 1 *Subespacio A-invariante.*
Sea $A \in R^{n*n}$ la representación matricial de un mapeo de R^n a R^n. Sea $R^s \subset R^n$ tal que $\forall\ \mathbf{x} \in R^s,\ \mathbf{y} = A\mathbf{x} \in R^s$. Entonces se dice que el subespacio R^s es A-invariante.

Es claro que los subespacios unidimensionales definidos por $\overline{\mathbf{x}}_1$ y $\overline{\mathbf{x}}_2$, en el ejemplo anterior, son subespacios $A-invariantes$ de una sola dimensión.
A continuación se formalizarán estas ideas.

Sea $A \in R^{n*n}$ la representación matricial de un mapeo lineal de R^n a R^n , esto es,

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad R^n \rightarrow R^n \\ \mathbf{y} \quad &= \quad A\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in R^n\ , \mathbf{y} \in R^n \end{aligned}$$

Definición 2 *Vector y Valor propio correspondiente de una matriz.*
Sea $A \in R^{n*n}$. Sean $\mathbf{x} \in R^n$ y $\lambda \in C$ tales que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},\ \mathbf{x} \neq 0 \in R^n \tag{1}$$

La $\mathbf{x}$ y la λ satisfaciendo (1) se denominan vector propio y valor propio correspondientes, de la matriz A.

La ecuación (1) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \in R^n \tag{2}$$

$$\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \in R^n \tag{3}$$

Observación 3 *Si $B \in R^{m*n}$ es cualquier matriz de dimensiones $m*n$, entonces $\mathbb{N}(B) = \mathbb{N}(-B)$.*

De las ecuaciones (2) y (3), es claro que si $\mathbf{x} \in R^n$ es un vector propio de A con valor propio correspondiente λ,
entonces

$$\mathbf{x} \in \mathbb{N}(A - \lambda I) = \mathbb{N}(\lambda I - A) \tag{4}$$

Definición 4 *Espacio Propio (E.P.)*

El Espacio Propio correspondiente a un vector propio cualquiera, es el subespacio de R^n en el que "vive" el vector propio. Este subespacio es igual a

$$E.P. = Espacio \ \Pr opio = \mathbb{N}(A - \lambda I) = \mathbb{N}(\lambda I - A)$$

y por consiguiente

$$\dim(E.P.) = \dim[\mathbb{N}(A - \lambda I)] = \dim[\mathbb{N}(\lambda I - A)] \tag{5}$$

Resultado 5 *El Espacio Propio es un subespacio de R^n tal que*

$$\dim(E.P.) = n - \dim[\mathrm{Im}(A - \lambda I)] = n - rank[A - \lambda I] \tag{6}$$

$$\dim(E.P.) = n - \dim[\mathrm{Im}(\lambda I - A)] = n - rank[\lambda I - A]$$

Este resultado es un caso particular del siguiente resultado del Álgebra Lineal:

Resultado 6 *Sea $A \in R^{m*n}$ la representación matricial de un mapeo $R^n \rightarrow R^m$.*

Entonces

$$n = \dim[\mathbb{N}(A)] + \dim[\mathrm{Im}(A)] = \dim[\mathbb{N}(A)] + rank[A] \tag{7}$$

La demostración de este resultado puede consultarse en cualquier texto de Álgebra Lineal.

Por otro lado, la matriz $A - \lambda I$ $(A - \lambda I)$ tiene como elementos a los mismos elementos de la matriz A $(-A)$, excepto los de su diagonal, que son monomios en λ de la forma

$$a_{ii} - \lambda \ (\lambda - a_{ii}), \ \forall \ i = \overline{1, n}$$

Así que la matriz $A - \lambda I$ $(\lambda I - A)$ es una matriz polinomial de dimensiones $n * n$ con indeterminado $\lambda \in C$.

De la definición de vector propio y valor propio resumida en las ecuaciones (2) y (3), es claro que para que el vector propio $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x} \neq 0$ exista, es necesario que exista $\mathbb{N}(A - \lambda I) = \mathbb{N}(\lambda I - A)$ y esto implica que

$$\det[A - \lambda I] = \det[\lambda I - A] = 0 \tag{8}$$

Definición 7 *Polinomio Característico de una matriz.*

Sea $A \in R^{n*n}$. Sean $A - \lambda I$ y $\lambda I - A$, entonces $\pi(\lambda)$ definido como

$$\pi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(A - \lambda I) \tag{9}$$

se denomina Polinomio característico de la matriz A.

El determinante de una matriz es un escalar. De la definición de determinante de una matriz, debe ser claro que $\pi(\lambda)$ dado por (9) es un polinomio en λ, de grado "n" y por el teorema fundamental del álgebra se tiene que:

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = && (10)\\
&= (\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) && (11)\\
-\pi(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = -\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - ... - a_1\lambda - a_0 = \\
&= -(\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) && (12)
\end{aligned}$$

En donde $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_3$ son las *raíces o ceros* del polinomio $\pi(\lambda)$ (-$\pi(\lambda)$), esto es:

$$\pi(\lambda_i) = 0, \forall i = \overline{1, n}$$

Como puede verse de las líneas anteriores, el papel desempeñado por las matrices $A-\lambda I$ y $\lambda I - A$ es el mismo, y las raíces de los polinomios $\pi(\lambda)$ y $-\pi(\lambda)$ son las mismas así que de aquí en adelante, solo se hará referencia indistintamente, a una cualquiera, de estas dos matrices.

Resumen 8 *Como el polinomio característico es de grado "n" y por lo tanto tiene "n" raíces, ceros o soluciones, asociados a la matriz* $A \in R^{n*n}$ *existen "n" valores propios y "n" vectores propios correspondientes que pueden calcularse a partir de las ecuaciones (1), o (2) o (3).*

Ejemplo 9 *Considérese nuevamente a la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcular los valores y los vectores propios correspondientes.

Solución 10 *Calcúlese cualquiera de las matrices* $(A - \lambda I)$ *o* $(\lambda I - A)$*:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

Calcúlese el determinante de esta matriz:

$$\pi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda(-3-\lambda) - (-2)(1) = \lambda^2 + 3 + 2 = 0$$

Las raíces de $\pi(\lambda)$ *o valores propios de* A *son:*

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

Se pueden usar indistintamente las igualdades (1), (2) o (3), para realizar el cálculo de los vectores propios correspondientes, las tres son la misma relación entre x *y* λ*, así que a lo largo de los ejemplos usaremos cualquiera de las tres igualdades para calcular los vectores propios.*

Cálculo del vector propio x_1 *correspondiente a* $\lambda_1 = -1$:

Para $\lambda_1 = -1$*, empleando (1), se tiene:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Expandiendo esta última expresión, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 * x_1 + x_2 &= -x_1 \\ -2x_1 - 3x_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Obsérvese que estas dos expresiones son la misma, es decir, solamente se tiene una ecuación y dos incógnitas. Esto es así porque para los valores propios λ_1 *y* $\lambda_2, \det[A - \lambda I] = \det[\lambda I - A] = 0$ *,lo que implica que del sistema de* n *ecuaciones (en este caso* $n = 2$*) definido por (13) una es redundante y entonces se tiene un sistema de* $n - 1$ *ecuaciones con* n *incógnitas. En el caso que nos ocupa, se tiene una sola ecuación que es*

$$x_2 = -x_1$$

El sistema de ecuaciones resultante, que en este caso consta de una sola ecuación, tiene en consecuencia, un número infinito de soluciones, una de ellas se obtiene proponiendo un valor cualquiera para una de las incógnitas, digamos para x_1 *y se usa la ecuación existente para calcular* x_2 :

Sea $x_1 = 1$*, entonces* $x_2 = -1$*, por lo que el vector propio correspondiente al valor propio* $\lambda_1 = -1$ *es:*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que cualquier otra solución del sistema de ecuaciones (13), resulta ser un vector en la misma dirección que el vector x_1*, por esta razón, se habla de un solo vector propio para cada valor propio. Por ejemplo, el vector*

$$\widetilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

también satisface al sistema (13) y resulta ser el mismo vector x_1 *normalizado.*

Cálculo del vector propio $\mathbf{x}_2$ *correspondiente a* $\lambda_2 = -1$:

De manera análoga se calcula el vector $\mathbf{x}_2$*, correspondiente al valor propio* λ_2 *pero en este caso se se usará la expresión (3) para ilustrar el hecho de que es indistinto usar cualquiera de las ecuaciones (1), (2) o (3) para calcular los vectores propios :*

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituyendo a $\lambda_2 = -2$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expandiendo esta última expresión se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Como en el caso de λ_1, de este sistema de ecuaciones solo una es útil. Las razones de este hecho, son las mismas que se esgrimieron en el caso anterior. Se propone que $x_1 = 1$, por lo que $x_2 = -2$ y el vector propio $\mathbf{x}_2$ está dado por:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

que también puede normalizarse:

$$\widetilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 11 *1.- Sean las matrices siguientes:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; *b)* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; *c)* $C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in R$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; *e)* $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$;*f)* $F = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Calcule los valores propios y los vectores propios correspondientes para cada una de estas matrices. ¿Qué concluye de éstos ejercicios?

2.-

De lo anteriormente expuesto, queda claro que si se tiene una matriz $A \in R^{n*n}$, su polinomio característico es un polinomio de grado n, por lo tanto tiene n valores propios con n vectores propios correspondientes asociados a ella. A continuación se verá una propiedad importante de los vectores propios de una matriz y se distinguirán dos casos posibles.

Teorema 12 *Un conjunto de k vectores propios correspondientes a cualesquiera k valores propios diferentes, es un conjunto linealmente independiente.*

Prueba. La demostración se hace por inducción.

Es claro que para $k = 1$, el teorema es cierto. Supóngase ahora que cualquier conjunto de $(p - 1)$ vectores propios correspondientes a $(p - 1)$ valores propios distintos de la matriz A, es un conjunto linealmente independiente de vectores. Entonces, se debe demostrar que cualquier conjunto de p vectores propios de A digamos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p$ con valores propios correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ son vectores propios linealmente independientes. Se demostrará esto por contradicción.

Supóngase que estos p vectores son linealmente dependientes, entonces existen constantes $c_1, c_2, ..., c_p$, no todas iguales a cero tales que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + ... + c_p\mathbf{x}_p = 0 \tag{14}$$

Premultiplíquese esta igualdad por $(A - \lambda_1 I)$:

$$c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{x}_2 + c_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{x}_3 + ... + c_p (\lambda_p - \lambda_1) \mathbf{x}_p = 0 \tag{15}$$

por la hipótesis inductiva, los $(p - 1)$ vectores propios $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, ..., \mathbf{x}_p$ son linealmente independientes. Esto implica que en la expresión anterior

$$c_i (\lambda_i - \lambda_1) = 0, \forall i = \overline{2, p}$$

y esto a su vez implica que $c_i = 0, \forall i = \overline{2, p}$ porque los valores propios son diferentes, así que (14) se reduce a

$$c_1\mathbf{x}_1 = 0$$

con $c_1 \neq 0$ por hipótesis, lo que implica que $\mathbf{x}_1 = 0$ lo cual es una contradicción y entonces esto muestra que los p vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p$ son linealmente independientes, lo que prueba el teorema por inducción. ■

Corolario 13 *Sea $A \in R^n$ con polinomio característico $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda n)$ tal que todos sus valores propios, esto es, todas las raíces de su polinomio característico, son diferentes. Entonces los n vectores propios correspondientes forman una base para el espacio R^n y además*

$$rank[(A - \lambda_i I)] = rank[(\lambda_i I - A)] = n - 1, \ \forall i = \overline{1, n}$$

lo que implica que el E.P. correspondiente a cada vector propio, es un subespacio invariante unidimensional.

Prueba. La demostración de estas aseveraciones es consecuencia directa del teorema anterior, en donde si se hace $p = n$, se ve claramente que los vectores propios de A forman una base de R^n por ser un conjunto de n vectores linealmente independientes.

Por otro lado si hay n vectores propios diferentes, que son linealmente independientes y cada vector propio pertenece a su espacio propio, esto es, es elemento de: *E.P. del vector* $\mathbf{x}_i =$ *Espacio* $\Pr$*opio del vector* $\mathbf{x}_i = \mathbb{N}(A - \lambda_i I) =$

$\mathbb{N}(\lambda_i I - A)$ $\forall i = \overline{1,n}$,el espacio propio de cada uno de estos vectores es un espacio unidimensional, por lo tanto, haciendo uso de la igualdad (7), se tiene el resultado, esto es:

$$rank[(A - \lambda_i I)] = rank[(\lambda_i I - A)] = n - 1, \ \forall i = \overline{1,n}$$

■

Resumen 14 *Para el caso de una matriz con valores propios diferentes, se puede seguir el siguiente procedimiento para el cálculo de los vectores propios correspondientes:*

Sea $A \in R^{n*n}$

i) Calcúlese el determinante de la matriz $(A - \lambda I)$ y obtenga el polinomio característico dado por (10).

ii) Obtenga las n raíces del polinomio característico,éstas son los n valores propios de la matriz A.

iii) Para cada uno de los valores propios, calcúlense los vectores propios correspondientes, hágase uso de la definición de vector propio dada por (1) (o por (2) o por (3)), que resulta en un sistemas de $n-1$ ecuaciones con n incógnitas, para cada uno de los n valores propios. Esto es, resuélvanse los siguientes n sistemas de ecuaciones para $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \lambda_2 \mathbf{v}_2 \\ ... & \quad ... \\ A\mathbf{v}_{n-1} &= \lambda_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} \\ A\mathbf{v}_n &= \lambda_n \mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{16}$$

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ así obtenidos, son los vectores propios de A correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2$, son un conjunto de n vectores linealmente independientes y por lo tanto, forman una base para el espacio R^n.

2 Valores Propios Repetidos y Vectores Propios Generalizados

Considérese ahora el caso en el que el polinomio característico de la matriz tiene valores propios repetidos.*******

Sea $A \in R^{n*n}$ y sea

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = \\ &= (\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_i)^{\nu}...(\lambda - \lambda n) \end{aligned} \tag{17}$$

su polinomio caraterístico. Sin pérdida de generalidad, se supondrá que solo el valor propio i-ésimo está repetido ν veces. Si existen más valores propios repetidos, se aplica el mismo razonamiento que el que se va a exponer.

Resultado 15 ***Vectores propios asociados al valor propio repetido*** λ_i.
El número de vectores propios asociados al valor propio λ_i repetido ν veces, es igual a la dimensión del espacio propio asociado al valor propio λ_i y es igual a:

$$\begin{gathered} \dim(E.P.de\ \lambda_i) = \\ = n - \dim[\operatorname{Im}(A - \lambda_i I)] = n - rank[A - \lambda_i I] = \\ = n - \dim[\operatorname{Im}(\lambda_i I - A)] = n - rank[\lambda_i I - A] \end{gathered} \tag{18}$$

La dimensión del espacio propio correspondiente al valor propio repetido λ_i, depende de cómo es el rango de la matriz $A - \lambda_i I$.

Si el rango de esta matriz disminuye en ν unidades, entonces de acuerdo a (18), la dimensión del espacio propio correspondiente será ν. Esto es, si éste es el caso, correspondientes al valor propio λ_i, se tendrán ν vectores propios.

Estos ν vectores propios se pueden calcular a partir de la definición de vector propio dada por (1) o (2) o (3). Tómese por ejemplo la siguiente expresión para calcular los ν vectores propios correspondientes a λ_i

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = 0 \in R^n \tag{19}$$

. Esta expresión (19) define un sistema de n ecuaciones, en donde las incógnitas son los componentes del vector $\mathbf{x}$. Como $rank[\lambda_i I - A] = n - \nu, \nu$ de estas ecuaciones son redundantes, por lo que solo se tienen $n - \nu$ ecuaciones útiles. Esto es, se tiene la posibilidad de calcular ν vectores propios linealmente independientes correspondientes al valor propio λ_i.

Considérese el siguiente ejemplo ilustrativo de este caso:

Ejemplo 16 *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Obtenga el polinomio característico de la matriz, obtenga los valores propios de la matriz y los vectores propios correspondientes.

Solución 17 *Calcúlese la matriz* $\lambda I - A$:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & \lambda+1.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & \lambda+2 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & \lambda+1.5 \end{bmatrix}$$

Calcúlese el polinomio característico de esta matriz:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \\ &= \lambda^4 + 7\lambda^3 + 18\lambda^2 + 20\lambda + 8 = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)^3 \end{aligned}$$

los valores propios de la matriz son $-1,\ -2,\ -2,\ -2.$
Para el valor propio -1*, que no está repetido se tiene que*

$$(\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que rank $(\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = 3$,*(la fila dos de la matriz es igual a la fila tres multiplicada por -1)y por lo tanto* $\dim(E.P.de\ \lambda = -1) = n - rank\ (\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = 4 - 3 = 1$, *resultado que está de acuerdo con el corolario anterior [13] para el caso de valores propios diferentes. A continuación se calculará el vector propio correspondiente. De la definición de vector propio se tiene: que* $(\lambda I - A)|_{\lambda=-1}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *así que*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

expandiendo esta igualdad matricial, se observa que las tres ecuaciones útiles son, porque la segunda ecuación y la primera solo difieren en el signo:

$$\begin{aligned} x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_4 &= 0 \\ 0.5x_2 - 0.5x_4 &= 0 \\ -0.5x_2 + x_3 - 0.5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Si se propone $x_1 = 1$ *y se resuelve el sistema de ecuaciones para* x_2, x_3 *y* x_4*, se obtiene:* $x_2 = 1,\ x_3 = 1, x_4 = 1$*. Por lo que el vector propio* $\mathbf{v}_1$ *correspondiente al valor propio* $\lambda = -1$ *es:*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el valor propio -2 *que está repetido tres veces, se tiene que:*

$$(\lambda I - A)|_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que rank $(\lambda I - A)|_{\lambda=-2} = 1$*, pues todas las filas de la matriz son iguales. Por lo tanto* $\dim(E.P.de\ \lambda = -2) = n - rank\ (\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = 4 - 1 = 3$*, lo que indica que correspondientes al valor propio* $\lambda = -2$*, existen tres vectores propios. De la definición de vector propio se tiene: que* $(\lambda I - A)|_{\lambda=-2}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, así que*

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

expandiendo esta igualdad matricial, solo queda una ecuación útil, con cuatro incógnitas. Esto da tres grados de libertad, necesarios para calcular tres soluciones linealmente independientes:

La única ecuación útil es:

$$-0.5x_2 - 0.5x_4 = 0 \tag{20}$$

Si se proponen $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1$ *y se resuelve para* x_4*, se obtiene* $x_4 = 1$*, por lo que el primer vector propio correspondiente a* $\lambda = -2$ *es:*

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Procediendo de manera análoga, se proponen los otros dos vectores propios faltantes, teniendo el cuidado de escoger valores tales que los vectores resultantes sean linealmente independientes. Esto es factible de hacerse porque se tienen suficientes grados de libertad para lograrlo. Por ejemplo, para el vector $\mathbf{v}_3$ *se puede resolver (20) de la siguiente forma: se proponen* $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ *lo que resulta en* $x_4 = 1$*, esto es:*

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en donde se tuvo el cuidado de escoger valores tales que el vector resultante $\mathbf{v}_3$*fuera linealmente independiente del vector* $\mathbf{v}_2$*. Procediendo de manera análoga para el cálculo del tercer vector propio correspondiente a* $\lambda = -2$ *se propone* *que* $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$, *lo que resulta en* $x_4 = -1$. *Por lo que el tercer vector propio correspondiente a* $\lambda = -2$ *es:*

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que el conjunto de vectores propios $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ *correspondientes a* $\lambda = -2$, *es un conjunto linealmente independiente y en este caso, los vectores* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ *forman una base para el espacio lineal* R^4.

Existen otras situaciones que se pueden dar en el caso en que se tengan valores propios repetidos. Específicamente el caso en el que la matriz $A - \lambda_i I$ no disminuye ν unidades, sino un número diferente. Como caso ilustrativo, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18 *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & -1 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & -2.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

Obtenga el polinomio característico de la matriz, obtenga los valores propios de la matriz y los vectores propios correspondientes.

Solución 19 *Calcúlese la matriz* $\lambda I - A$:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & \lambda+1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & -1 & \lambda+2.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -0.5 & \lambda+2.5 \end{bmatrix}$$

Calcúlese el polinomio característico de esta matriz:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \\ &= \lambda^4 + 7\lambda^3 + 18\lambda^2 + 20\lambda + 8 = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)^3 \end{aligned}$$

los valores propios de la matriz son -1, -2, -2, -2. *Obsérvese que esta matriz y la del ejemplo anterior tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos valores propios.*

Para el valor propio -1*, que no está repetido se tiene que*

$$(\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & -1 & 1.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que rank $(\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = 3$*,(la fila dos de la matriz es igual a la fila tres multiplicada por -1)y por lo tanto* $\dim(E.P.de\ \lambda = -1) = n - rank\ (\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = 4 - 3 = 1$*, resultado que está de acuerdo con el corolario anterior [13] para el caso de valores propios diferentes. A continuación se calculará el vector propio correspondiente. De la definición de vector propio se tiene: que* $(\lambda I - A)|_{\lambda=-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, así que*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & -1 & 1.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

expandiendo esta igualdad matricial, se observa que la segunda ecuación es igual a la cuarta multiplicada por -1*, por lo que solo son tres las ecuaciones útiles:*

$$\begin{aligned} x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_4 &= 0 \\ 0.5x_2 - 0.5x_4 &= 0 \\ -0.5x_2 + x_3 - 0.5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Si se propone $x_1 = 1$ *y se resuelve el sistema de ecuaciones para* x_2, x_3 *y* x_4*, se obtiene:* $x_2 = 1,\ x_3 = 1, x_4 = 1$*. Por lo que el vector propio* $\mathbf{v}_1$ *correspondiente al valor propio* $\lambda = -1$ *es:*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el valor propio -2 *que está repetido tres veces, se tiene que:*

$$(\lambda I - A)|_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & -1 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que rank $(\lambda I - A)|_{\lambda=-2} = 3$*. Por lo tanto* $\dim(E.P.de\ \lambda = -2) = n - rank\ (\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = 4 - 3 = 1$*, lo que indica que correspondientes al valor propio* $\lambda = -2$*, existe solo un vector propio. De la definición de vector propio se tiene que* $(\lambda I - A)|_{\lambda=-2}\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, así que:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & -1 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La primera y la cuarta ecuación son la misma, así que solo hay tres ecuaciones útiles y cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} -x_1 - 0.5x_3 + 0.5x_4 = &\quad 0 \\ x_1 - x_2 + 0.5x_3 - 1.5x_4 = &\quad 0 \\ -x_2 + 0.5x_3 - 0.5x_4 = &\quad 0 \end{aligned}$$

En este caso, solo se puede calcular un vector propio, pues solo se tiene un grado de libertad. Si se ´propone $x_1 = 1$ *y se resuelve el sistema resultante se obtiene:* $x_2 = -1, x_3 = -1$ *y* $x_4 = 1$*.Así que el vector propio asociado al valor propio repetido* $\lambda = -2$ *es:*

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En este caso no se pueden calcular más vectores propios, la cuestión es ¿qué hacer para calcular los dos vectores faltantes asociados al valor propio $\lambda = -2$*?*

Razonando de manera análoga a la que se razonó en el caso de los valores propios calculados previamente, se tiene ahora lo siguiente:

$$rank\,[(A - \lambda I)]^3_{\lambda=-2} = rank \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = 1$$

Esto significa que: $\dim\left[\mathbb{N}\,[(A - \lambda I)]^3_{\lambda=-2}\right] = n-$ *rank* $(\lambda I - A)|^3_{\lambda=-1} = 4 - 1 = 3$*, asociados al espacio nulo de* $[(A - \lambda I)]^3_{\lambda=-2}$ *se pueden calcular tres vectores linealmente independientes que vivan en ese espacio. Supóngase que al menos un vector* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *existe, tal que*

$$[(A - \lambda I)]^i_{\lambda=-2}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{i} \geqq \mathbf{3} \tag{21}$$

y que además los vectores

$$[(A - \lambda I)]^i_{\lambda=-2}\,\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \forall \mathbf{i} < \mathbf{3}$$

entonces se puede constatar que los vectores $\mathbf{v}$, $[(A - \lambda I)]_{\lambda=-2}\,\mathbf{v}$ *y*

$[(A - \lambda I)]^2_{\lambda=-2}\,\mathbf{v}$ *pertenecen todos al espacio nulo de la matriz* $[(A - \lambda I)]^3_{\lambda=-2}$ *y son los vectores que faltan para completar los vectores asociados al valor propio* -2 *repetido tres veces. ¿Son estos vectores linealmente dependientes o independientes? Estos vectores son linealmente independientes.*

Para probarlo, suponga que no lo son, entonces cualquiera de ellos puede representarse como la combinación lineal de los otros dos y por lo tanto existen constantes $c_1, c_2, c_2,$ *no todas cero tales que*

$$c_1[(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} + c_2[(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} + c_3[(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

supóngase sin pérdida de generalidad que $c_2 \neq 0$, entonces

$$c_2[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = -c_1[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} - c_3[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$$

$$[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = -\frac{c_1}{c_2}[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} - \frac{c_3}{c_2}[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$$

$$[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = \mathbf{c}_1^{'}[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} + \mathbf{c}_\mathbf{2}'\,[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$$

multiplicando esta última expresión por $[(A-\lambda I)]^2_{\lambda=-2}$ se tiene

$$[(A-\lambda I)]^3_{\lambda=-2}\,\mathbf{v} = \mathbf{c}_1'\,[(A-\lambda I)]^2_{\lambda=-2}\,\mathbf{v} + \mathbf{c}_\mathbf{2}'\,[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{4}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$$

el primer miembro y el segundo sumando del segundo miembro de esta igualdad, son iguales a cero por (21), lo que implica que $[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pero esto es una contradicción como lo indica la satisfacción de (21). Se pudo proceder de manera análoga con cualquiera de los otros dos vectores y la contradicción hubiera sido la misma, por lo tanto la suposición de que estos vectores son linealmente dependientes es falsa y se concluye que son linealmente independientes.

Por otro lado obsérvese que

$$A[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = [\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}]\,[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} =$$

$$= [(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{3}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}\,[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} =$$

$$= \boldsymbol{\lambda}\,[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$$

Esto es, el vector $[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio correspondiente $\lambda = -2$, pero ya hemos calculado al único vector propio correspondiente al valor propio $\lambda = -2$ y este vector es el vector $\mathbf{v}_2 = [(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se requiere entonces calcular a los vectores $\mathbf{v}_3 \triangleq [(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_4 \triangleq [(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Estos vectores pueden calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$A[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{k}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} = [\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}][(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{k}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} =$$

$$= [(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{k+1}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}\,[(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})]^{\mathbf{k}}_{\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{2}}\,\mathbf{v} \tag{22}$$

$$\forall k < 3$$

para $k = 2, 1, 0$ en la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_2 &= \lambda\mathbf{v}_2 \\ A\mathbf{v}_3 &= \lambda\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \\ A\mathbf{v}_4 &= \lambda\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Los vectores que se están buscando son $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ porque el vector $\mathbf{v}_2$ ya se calculó previamente. Haciendo $\lambda = -2$ y calculando a $\mathbf{v}_3$ y a $\mathbf{v}_4$ se tiene

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & -1 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & -2.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 & -2.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = -2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & -1 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & -2.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 & -2.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_4 = -2\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_3$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$, resultan dos sistemas de ecuaciones cuyas incógnitas son las componentes de estos dos vectores. Estos dos sistemas de ecuaciones solo tienen tres ecuaciones útiles , porque rank $[(A - 2I)] = 3$. El resultado es:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ son vectores linealmente inndependientes y por lo tanto forman una base para R^4.

Estos ejemplos sugieren el siguiente procedimiento general para tratar el caso de valores propios repetidos.

Como se asentó en el Resultado 14, el número de vectores propios asociados al valor propio λ_i repetido ν veces está dado por (18). Supóngase ahora que $rank\,(A - \lambda_i I) = n - p$, es decir, supóngase que el valor propio λ_i que está repetido ν veces, hace caer el rango de la matriz $A - \lambda_i I$ en p unidades, en donde $1 \leq p \leq \nu$. De acuerdo a (18), asociados al valor propio λ_i, se tendrán p vectores propios. La cuestión es que faltan $q = \nu - p$ vectores asociados al valor propio λ_i (Nótese que si $p = \nu$, entonces $q = 0$, es decir, no faltan vectores propios asociados al valor propio λ_i y hay entonces ν vectores propios asociados al valor propio λ_i repetido ν veces). Para tratar este caso se requiere de la siguiente definición:

Definición 20 ***Vectores Propios Generalizados***

Sea $A \in R^{n*n}$. Si para algún valor $\lambda \in \mathcal{C}$ y algún entero $q \geq 1$ existe un vector $\mathbf{v} \in R^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tal que

$$(A - \lambda I)^q \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ pero } (A - \lambda I)^{q-1} \, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \tag{23}$$

entonces se dice que $\mathbf{v}$ es un vector propio generalizado con índice q correspondiente al valor propio generalizado λ de la matriz A.

Nótese que cuando $q = 1$, λ es un valor propio y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es el vector propio correspondiente.

Nótese también que por definición, los vectores propios generalizados, se encuentran en el nulo de la matriz $(A - \lambda I)^q$ y que

$$(A - \lambda I)^k \, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \; \forall \mathbf{k} < \mathbf{q} \;\; \text{y} \;\; (A - \lambda I)^k \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \; \forall \mathbf{k} \geq \mathbf{q} \tag{24}$$

Así que los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (A - \lambda I)^{q-1} \, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_2 &= (A - \lambda I)^{q-2} \, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{v}_{q-1} &= (A - \lambda I) \, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_q &= (A - \lambda I)^0 \, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{25}$$

se encuentran en el nulo de la matriz $(A - \lambda I)^q$, y son por tanto vectores generalizados y además el vector $\mathbf{v}_1 = (A - \lambda I)^{q-1} \, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es vector propio de A.

Que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, .., \mathbf{v}_p$ se encuentran en el nulo de la matriz $(A - \lambda I)^q$ y son por lo tanto vectores propios generalizados se puede ver fácilmente:

$$(A - \lambda I)^q \, \mathbf{v}_k = (A - \lambda I)^q \, (A - \lambda I)^k \, \mathbf{v}, \forall \mathbf{k} = \overline{\mathbf{0}, \mathbf{q} - \mathbf{1}}$$

ya que de acuerdo a (24) $(A - \lambda I)^k \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \; \forall \mathbf{k} \geq \mathbf{q}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A(A - \lambda_i I)^{q-1}\mathbf{v} &= (A - \lambda_i I + \lambda_i I)(A - \lambda_i I)^{q-1}\mathbf{v} = \\ &= (A - \lambda_i I)^q \mathbf{v} + \lambda_i (A - \lambda_i I)^{q-1}\mathbf{v} = \\ &= \lambda_i (A - \lambda_i I)^{q-1}\mathbf{v} \end{aligned} \tag{26}$$

lo que demuestra que el vector $\mathbf{v}_1 = (A - \lambda_i I)^{q-1}\mathbf{v}$ es vector propio de A, con valor propio correspondiente λ_i. En la expresión anterior se hizo uso de (24). Este resultado implica que los vectores propios correspondientes al valor propio λ_i, son también vectores propios generalizados y que por lo tanto el espacio propio correspondiente al valor propio λ_i , está contenido en el espacio que contiene a los vectores propios generalizados de λ_i.

Lema 21 *Los vectores propios generalizados definidos en (25) son un conjunto de q vectores linealmente independientes*

Prueba. Se demostrará el lema por contradicción:

Supóngase que los vectores

$$\left\{(A-\lambda I)^0\,\mathbf{v}, (A-\lambda I)^1\,\mathbf{v}, ...\,(A-\lambda I)^{k-1}\,\mathbf{v}\right\}$$

son linealmente dependientes, entonces cualquiera de los vectores, digamos el vector $(A-\lambda I)^k\,\mathbf{v}$ para algún k $(0 \leq k < q-1)$ se puede expresar como una combinación lineal del resto de los vectores:

$$(A-\lambda_i I)^k\,\mathbf{v} = \sum_{j=k+1}^{p-1} c_j (A-\lambda_i)^j \mathbf{v}$$

Puesto que $(A-\lambda_i I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $k \geq q$, premultiplicando ambos miembros de esta ecuación por $(A-\lambda_i I)^{q-1-k}$ da como resultado que $(A-\lambda_i I)^{q-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, pero esto es una contradicción, lo que prueba que los vectores en cuestión, son linealmente independientes. ■

Por los resultados presentados, para calcular los q vectores propios generalizados se procede de la siguiente manera:

El primer vector generalizado es el vector $\mathbf{v}_1 = (A-\lambda I)^{q-1}\,\mathbf{v}$, que como muestra (26), es uno de los vectores propios de la matriz A. De hecho, se puede tomar cualquiera de los vectores propios de la matriz. El resto de los vectores se calculan de acuerdo a la siguiente iteración:

$$A(A-\lambda_i I)^k \mathbf{v} = (A-\lambda_i I)^{k+1}\mathbf{v} + \lambda_i (A-\lambda_i I)^k \mathbf{v} \tag{27}$$

$$\forall k = \overline{0, q-1}$$

que se obtiene de manera análoga a (26), o sustituyendo en ésta a $q-1$ por k y haciendo uso de (24).

Empleando en (27) la definición de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_q$ dada por (25), se tiene que (27) se reduce a:

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{v}_1 &= \lambda_i \mathbf{v}_1 \\
A\mathbf{v}_2 &= \lambda_i \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \\
& \quad .... \\
A\mathbf{v}_{q-1} &= \lambda_i \mathbf{v}_{q-1} + \mathbf{v}_{q-2} \\
A\mathbf{v}_q &= \lambda_i \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_{q-1}
\end{aligned} \tag{28}
$$

y es a partir de este sistema de ecuaciones que se calculan los q vectores propios generalizados, que eran los vectores que faltaban para completar el conjunto de ν vectores asociados al valor propio λ_i que está repetido ν veces.

Resumen 22 *Para el caso de una matriz con valores propios repetidos, se puede entonces seguir el siguiente procedimiento para el cálculo de los vectores propios y vectores propios generalizados correspondientes:*

Sea $A \in R^{n*n}$ *con polinomio característico dado por (17), en donde sin pérdida de generalidad, se considera que solamente el valor propio* $i-$*ésimo está repetido* ν *veces.*

i) Para cada uno de los valores propios diferentes, calcúlense los vectores propios correspondientes de acuerdo al procedimiento descrito líneas arriba: para cada valor propio diferentte, hágase uso de la definición de vector propio dada por (1) (o por (2) o por (3)), que resulta en un sistemas de $n-1$ *ecuaciones con* n *incógnitas ya que cada valor propio diferente hace caer el rango de la matriz* $(A-\lambda I)$ *en una unidad.*

ii) Para el valor propio repetido:

a)Sea $rank\left[(A-\lambda_i I)\right] = n-p,\ 1 \leq p \leq \nu$ *lo que implica que asociados al valor propio* λ_i *se pueden calcular* p *vectores propios.*

b) Calcúlense los p *vectores propios asociados al valor propio* λ_i*, de acuerdo al procedimiento referido en i).*

c) Asociados al valor propio λ_i *,se tienen* $q=\nu-p$ *vectores propios generalizados, el primero de los cuales es cualquiera de los vectores propios correspondientes a* λ_i*. Nótese que si* $p=\nu$*, entonces se tienen* ν *vectores propios asociados al valor propio* λ_i *,que se calculan de acuerdo al procedimiento i).*

Los q *vectores propios generalizados asociados al valor propio* λ_i *se calculan de acuerdo a (28), esto es:*

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{v}_1 &= \lambda_i \mathbf{v}_1 \\
A\mathbf{v}_2 &= \lambda_i \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \\
& \quad .... \\
A\mathbf{v}_{q-1} &= \lambda_i \mathbf{v}_{q-1} + \mathbf{v}_{q-2} \\
A\mathbf{v}_q &= \lambda_i \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_{q-1}
\end{aligned} \tag{29}
$$

en donde puede observarse que $\mathbf{v}_1$ *es vector propio (cualquiera previamente calculado) correspondiente a* λ_i*. El conjunto de vectores propios generalizados* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_q\}$ *es un conjunto linealmente independiente de vectores y por lo tanto forman una base para el subespacio* $R^q \subset R^n$*.*

Fin de procedimiento.

Ejemplo 23 *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -1.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Obtenga el polinomio característico de la matriz, obtenga los valores propios de la matriz y los vectores propios y propios generalizados correspondientes.

Solución 24 *Obtenga la matriz* $(\lambda I - A)$:

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 1.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & \lambda + 1.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & \lambda + 2 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico está dado por:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \\ &= \lambda^4 + 7\lambda^3 + 18\lambda^2 + 20\lambda + 8 = \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)^3 \end{aligned}$$

Los valores propios son: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, *con el valor propio* $\lambda_2 = -2$ *repetido tres veces.*

Para $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{-1}$:

Cálculo del vector propio $\mathbf{v}_1$:

$$(\lambda I - A)|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando la definición de vector propio dada por (2), se tiene

$$(\lambda I - A)|_{\lambda=-1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0$$

Lo que resulta en un sistema de 4 ecuaciones, una de las cuales es redundante, con cuatro incógnitas. Resolviendo para $\mathbf{v}_1$*, se obtiene:*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\boldsymbol{\lambda = -2}$:
Cálculo de los vectores propios y propios generalizados:

$$(\lambda I - A)|_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El cálculo del rango de esta matriz da

$$rank \left[(\lambda I - A)|_{\lambda=-2} \right] = 2$$

en donde puede observarse que la primera, tercera y cuarta filas, son iguales. Esto implica que $\dim \left[\mathbb{N}((\lambda I - A)|_{\lambda=-2}) \right] = 4 - 2 = 2$*, así que existen* 2 *vectores propios asociados al valor propio* $\lambda = -2$*. En este ejemplo, de acuerdo al procedimiento que se suministró líneas arriba, se tiene que* $n = 4, \nu = 3$*,* $p = 2$ *y* $q = 2$*. Lo que quiere decir que correspondientes al valor propio* $\lambda = -2$*, se tienen dos vectores propios generalizados, uno de los cuales es también vector propio de la matriz* A *correspondiente al valor propio* $\lambda = -2$*. Así que la situación es que se tienen que calcular los vectores* $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ *que satisfagan las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_2 &= \lambda_2 \mathbf{v}_2 \\ A\mathbf{v}_3 &= \lambda_2 \mathbf{v}_3 \\ A\mathbf{v}_4 &= \lambda_2 \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Resolviendo estas tres ecuaciones para $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$*, se obtiene (los detalles del cálculo se dejan al lector):*

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3 Forma canónica de Jordan de una matriz

Toda matriz $A \in R^{n*n}$ es algebraicamente equivalente o similar a una matriz $\Lambda \in R^n$ que es diagonal o diagonal por bloques y que en su diagonal pincipal despliega a los valores propios de la matriz $A \in R^{n*n}$.Esto es, existe $T \in R^{n*n}$, $\det(T) \neq 0$, tal que

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

La matriz de tranformación $T \in R^{n*n}$ que genera la forma canónica de Jordan Λ de la matriz A, es la matriz T cuyas columnas son los vectores propios y los vectores propios generalizados de la matriz A correspondientes a sus valores propios y a sus valores propios generalizados.

Como se anotó en la sección anterior cuando se trataron los conceptos de valor y vector propio de una matriz y su extensión a los consceptos de valor y vector propio generalizados, se presentan dos casos: el caso en que todos los valores propios son diferentes y el caso en el que se tienen valores propios repetidos. A continuación se tratarán estos dos casos.

3.1 Valores propios diferentes

Sea $A \in R^{n*n}$, sea $\pi(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$, su polinomio característico y sean todos sus valores propios diferentes, esto es:

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)$$

Correspondientes a estos n valores propios diferentes, existen n vectores propios que son linealmente independientes, y que por lo tanto forman una base de R^n . La matriz A expresada en esta base es precisamente la forma canónica de Jordan de la matriz en cuestión:

Tómese la expresión

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \lambda_2\mathbf{v}_2 \\ & .... \\ A\mathbf{v}_{n-1} &= \lambda_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} \\ A\mathbf{v}_n &= \lambda_n\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{30}$$

Este sistema de ecuaciones puede expresarse en forma compacta de la siguiente manera:

$$A[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ ...\ \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ ...\ \mathbf{v}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

o de la siguiente manera:

$$AT = T\Lambda$$

en donde

$$T = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ ... \ \mathbf{v}_n]$$

y

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Λ es la forma canónica de la matriz A y T es la matriz de transformación o cambio de coordenadas, cuyas columnas son los vectores propios de la matriz A.

3.2 Valores propios repetidos

Sea $A \in R^{n*n}$, sea $\pi(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$, su polinomio característico en el que, sin pérdida de generalidad, se considera que solo el valor propio λ_i se encuentra repetido ν veces, esto es:

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_i)^{\nu}...(\lambda - \lambda_n)$$

Correspondientes a los $n-\nu$ valores propios diferentes, existen $n-\nu$ vectores propios correspondientes, que son linealmente independientes, y que se calculan como ya se indicó en el caso de valores propios diferentes, por lo tanto forman una base para el subespacio $R^{n-\nu} \subset R^n$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \lambda_2\mathbf{v}_2 \\ &\vdots & (31) \\ A\mathbf{v}_{i-1} &= \lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} & (32) \\ A\mathbf{v}_{i+1} &= \lambda_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} & (33) \\ &\vdots & (34) \\ A\mathbf{v}_{n-\nu-1} &= \lambda_{n-\nu-1}\mathbf{v}_{n-\nu} \\ A\mathbf{v}_{n-\nu} &= \lambda_{n-\nu}\mathbf{v}_{n-\nu} \end{aligned}$$

Los ν vectores faltantes, asociados al valor propio λ_i, se calculan de acuerdo al procedimiento descrito líneas arriba correspondiente al caso de valores propios repetidos:

Sea

$$rank\,[A - \lambda_i I] = n - p$$

entonces, correspondientes al valor propioλ_i repetido ν veces, se tienen p vectores propios y $q = \nu - p$ vectores propios generalizados, uno de los cuales es uno de los vectores propios correspondientes a λ_i :

$$\begin{aligned}
A\mathbf{v}_1^i &= \lambda_i\ \mathbf{v}^i{}_1 \\
A\mathbf{v}_2^i &= \lambda_i\ \mathbf{v}^i{}_1 \\
&\vdots \\
A\mathbf{v}_p^i &= \lambda_i\ \mathbf{v}_p^i \\
A\mathbf{v}_{p+1}^i &= \lambda_i \mathbf{v}_{p+1}^i + \mathbf{v}_p^i \\
A\mathbf{v}_{p+2}^i &= \lambda_i \mathbf{v}_{p+2}^i + \mathbf{v}_{p+1}^i \\
&\vdots \\
A\mathbf{v}_{q-1}^i &= \lambda_i\ \mathbf{v}_{q-1}^i + \mathbf{v}_{q-2}^i \\
A\mathbf{v}_q^i &= \lambda_i \mathbf{v}_q^i + \mathbf{v}_{q-1}^i
\end{aligned}$$