

Trayectorias Óptimas con un Cuadricóptero

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto
Politécnico Nacional

Maestría en Ciencias en Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y
Submarina

Orlando García Pérez

Asesores:

Dr. Salazar Cruz Sergio

Dr. Santos Sánchez Omar Jacobo

Agosto, 2014

1 Planteamiento del problema

- Justificación
- Objetivos
- Breve descripción de resultados previos

2 Control

- Diseño de la trayectoria
- Resultados

- Encontrar la trayectoria mas corta que debe recorrer un cuadricóptero, minimizando un índice de desempeño, y que pueda ser seguida por un control de manera óptima

- El principal motivo de este proyecto es que no hay resultados publicados que utilicen el enfoque de programación dinámica con un vehículo de cuatro rotores.

- El principal motivo de este proyecto es que no hay resultados publicados que utilicen el enfoque de programación dinámica con un vehículo de cuatro rotores.
- Utilizando un control óptimo se logra un ahorro de energía factor importante en este tipo de vehículos.

- Objetivo General: Encontrar la trayectoria óptima que debe seguir un vehículo aéreo de cuatro rotores, con restricciones específicas.

- Objetivo General: Encontrar la trayectoria óptima que debe seguir un vehículo aéreo de cuatro rotores, con restricciones específicas.
- Objetivos Especificos
 - Diseñar una trayectoria con cierta restricción.
 - Obtener un control LQR tal que minimice un índice de desempeño, que sea capaz de seguir la trayectoria encontrada

Breve descripción de resultados previos

Trabajos representativos que utilizan el control óptimo en el seguimiento de trayectorias y/o estabilización.

-Discrete Optimal Control for a Quadrotor UAV: Experimental Approach.
O. Santos, H. Romero, S. Salazar and R. Lozano

-Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos.

Claudio Rosales, Gustavo Scaglia, Ricardo Carelli y Mario Jordan

-Optimal Trajectory Planning and LQR Control for a Quadrotor UAV Ian D. Cowling James F. Whidborne Alastair K. Cooke

La solución al problema de regulador cuadrático óptimo, para un sistema estándar de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

se obtiene una entrada de control óptima

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T p(t) \quad (2)$$

Estabiliza (1) y minimiza un índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (3)$$

donde $Q \geq 0$, $R > 0$, $P \geq 0$

El consumo de energía es un factor importante para los UAV's. En este caso se trata de un vehículo de cuatro rotores el cual puede estabilizarse en subsistemas como en [1]. Se considera el modelo reducido propuesto en [4]

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -u \sin \theta \\m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi \\m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\ \ddot{\phi} &= \tau_{\phi} \\ \ddot{\theta} &= \tau_{\theta} \\ \ddot{\psi} &= \tau_{\psi}\end{aligned}\tag{4}$$

Este modelo se puede estabilizar de manera óptima usando un control LQR (2) combinado con una linealización exacta con el objetivo de cancelar no linealidades.

Estabilización del subsistema Z:

$$m\ddot{z} = u\cos\phi - mg \quad (5)$$

Del sistema anterior se utiliza la aproximación de Euler para obtener la representación de estado en forma discreta y observamos que el sistema anterior puede linealizarse exactamente con una ley de control propuesto en [3]

$$u(k) = m(u_1(k) + g)(\cos\theta(k)\cos\phi(k))^{-1} \quad (6)$$

con $\cos\theta(k)\cos\phi(k) \neq 0$ si $\theta, \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Al sustituir la ley de control (6) el subsistema (5) discretizado queda de la siguiente forma:

$$x_z(k+1) = A_z x_z(k) + B_z u_1(k) \quad (7)$$

donde $A_z = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$, $T =$ Tiempo de muestreo.

Si el par A_z , B_z es controlable podemos hallar una ley de control óptima de horizonte infinito para (7) el cual debe minimizar un índice de desempeño

$$J_z = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_z^T(k) Q_z x_z(k) + u_1^2(k) R_z) \quad (8)$$

donde $H_z, Q_z \geq 0$, $R_z > 0$, están dadas y penalizan el estado y el consumo de energía respectivamente; $N * k = tf$. Entonces se desea hallar una ley de control $u_1(k)$ tal que minimice (8). La solución es presentada como sigue:

$$u_1^*(k) = -(R_z + B_z^T P_z B_z)^{-1} B_z^T P_z A_z x_z^*(k), \forall k \geq 0 \quad (9)$$

Si el par A_z, B_z son controlables, P_z cumple con la ecuación algebraica discreta de Riccati.

$$P_z = A_z^T P_z A_z - A_z^T P_z B_z (R_z + B_z^T P_z B_z)^{-1} B_z^T P_z A_z + Q_z \quad (10)$$

De acuerdo con la teoría de control el sistema en lazo cerrado con la ley de control (9) es estable y minimiza el índice de desempeño (8).

Para los siguientes subsistemas se sigue la misma mecánica lo cual conduce a lo siguiente.

Estabilización del subsistema ψ , cuya representación en forma discreta es:

$$x_\psi(k+1) = A_\psi x_\psi(k) + B_\psi \tau_\psi(k) \quad (11)$$

Del cual se obtiene el siguiente control:

$$\tau_\psi^*(k) = -(R_\psi + B_\psi^T P_\psi B_\psi)^{-1} B_\psi^T P_\psi A_\psi x_\psi^*(k), \forall k \geq 0 \quad (12)$$

Estabilización del subsistema $y - \varphi$:

Forma discretizada, tomando en cuenta (6) y que el control linealizante tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$.

$$x_{y,\phi}(k+1) = A_{y,\phi} x_{y,\phi}(k) + B_{y,\phi} \tau_{y,\phi}^*(k) \quad (13)$$

El control queda definido como:

$$\tau_{y,\phi}^*(k) = -(R_{y,\phi} + B_{y,\phi}^T P_{y,\phi} B_{y,\phi})^{-1} B_{y,\phi}^T P_{y,\phi} A_{y,\phi} x_{y,\phi}^*(k), \forall k \geq 0 \quad (14)$$

Finalmente se estabiliza el subsistema $x - \theta$ el cual esta definido en forma discreta como sigue:

$$x_{x,\theta}(k+1) = A_{x,\theta}x_{x,\theta}(k) + B_{x,\theta}\tau_{\theta}^*(k) \quad (15)$$

El control queda definido como:

$$\tau_{x,\theta}^*(k) = -(R_{x,\theta} + B_{x,\theta}^T P_{x,\theta} B_{x,\theta})^{-1} B_{x,\theta}^T P_{x,\theta} A_{x,\theta} x_{x,\theta}^*(k), \forall k \geq 0 \quad (16)$$

Diseño de la trayectoria

En este apartado se considera la representación en tiempo discreto con el enfoque de programación dinámica, se obtiene la trayectoria óptima y un control no lineal.

Se utiliza el modelo reducido (4) y se divide por subsistemas:

Control para el subsistema $z - \psi$

$$\begin{aligned} m\ddot{z}(t) &= u \cos \theta(t) \cos \varphi(t) - mg \\ \ddot{\psi}(t) &= \tau_{\psi}, \end{aligned}$$

Su representación en forma afín queda como sigue:

$$\dot{x}_{z,\psi} = f_{0,z,\psi}(x_{z,\psi}) + f_{1,z,\psi}(\theta, \psi)U,$$

Donde:

$$f_{0,z,\psi}(x_{z,\psi}) = \begin{bmatrix} x_{2,z} \\ -mg \\ x_{4,\psi} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_{1,z,\psi}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se discretiza con la aproximación de Euler

$$x_{z,\psi}(k+1) = f_{0,z\psi}(x_{z,\psi}(k)) + f_{1,z\psi}(\theta(k), \varphi(k)) U(k) \quad (17)$$

Se desea encontrar un control $\bar{u}(k)$ tal que el índice de desempeño:

$$J_{z,\psi} = \frac{1}{2} x_{z,\psi}^T(N) H_0 x_{z,\psi}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ x_{z,\psi}^T(k) Q_{z,\psi} x_{z,\psi}(k) + U^T(k) R_{z,\psi} U(k) \right\} \quad (18)$$

donde

$$H_0, Q_{z,\psi} \in R^{4 \times 4}, R_{z,\psi} \in R^{2 \times 2}, H_0, Q_{z,\psi} \geq 0, R_{z,\psi} > 0$$

Sea minimizado sujeto a (17) y finalmente se encuentra un control como sigue:

$$u^*(N-k) = -F_1(N-k) \begin{bmatrix} x_{1,z}(N-k) \\ x_{2,z}(N-k) \end{bmatrix} + F_2(N-k) \quad (19)$$

y la entrada de control:

$$\tau_\psi^*(N-k) = -G_1 \begin{bmatrix} x_{3,\psi}(N-k) \\ x_{4,\psi}(N-k) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Donde:

$$F_1(N-k) = \left[\frac{mt_s \cos(\theta(N-k)) \cos(\varphi(N-k))}{r_{11}m^2 + E_{22}t_s^2 \cos^2 \theta(N-k) \cos^2 \varphi(N-k)} \right] \begin{bmatrix} E_{21} \\ +E_{22} \end{bmatrix} \quad (E_{21}t_s)$$

$$F_2(N-k) = \left[\frac{mt_s \cos(\theta(N-k)) \cos(\varphi(N-k))}{r_{11}m^2 + E_{22}t_s^2 \cos^2 \theta(N-k) \cos^2 \varphi(N-k)} \right] E_{22}gt_s,$$

$$G_1 = \left(\frac{t_s}{E_{44}t_s^2 + r_{22}} \right) \begin{bmatrix} E_{43} & (E_{43}t_s + E_{44}) \end{bmatrix} \cdot y$$

$$E_{ij} = \begin{cases} h_{ij}, & \text{for } k = 1, \\ q_{ij}, & \text{for } k > 1. \end{cases}$$

Los subsistemas $x - \theta$ y $y - \phi$ difieren en el índice de desempeño a minimizar pues aquí es donde la trayectoria influye:

Se desea minimizar un índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2} x_z^T(N) H_0 x_z(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} g_0 + U^T(k) R_z U(k) \quad (22)$$

donde:

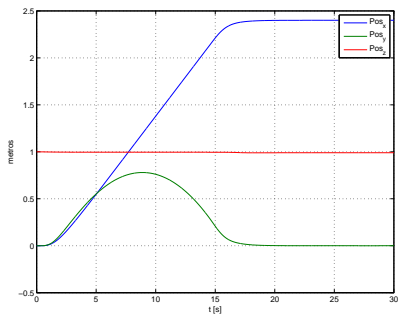
$$g_0 = (x_z^T(k) Q_z x_z - r)^2$$

Y r es un escalar que corresponde a el radio mínimo del obstáculo que debe evitar el vehículo.

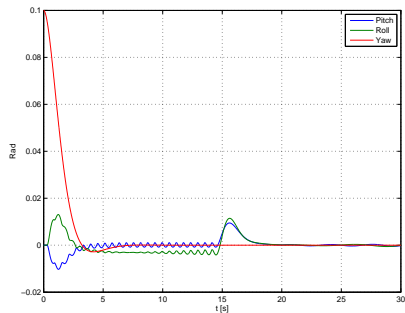
Se halla los controles para τ_ϕ y τ_θ pero el punto importante es que en ellos se encuentra la trayectoria deseada para x y y . Y estos controles obtenidos también pueden implementarse para seguir la trayectoria, no obstante la idea es utilizar el control arriba propuesto.

Resultados de simulación con el control óptimo

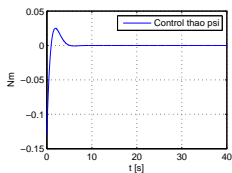
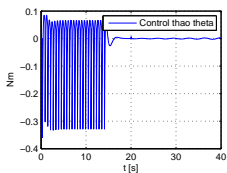
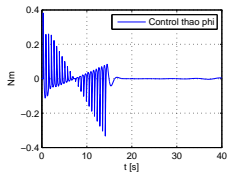
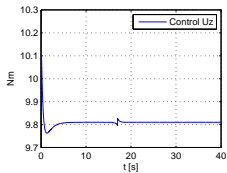
Posición en los ejes x,y,z. Condiciones iniciales: $x = 0m$, $y = 0m$, $z = 2m$



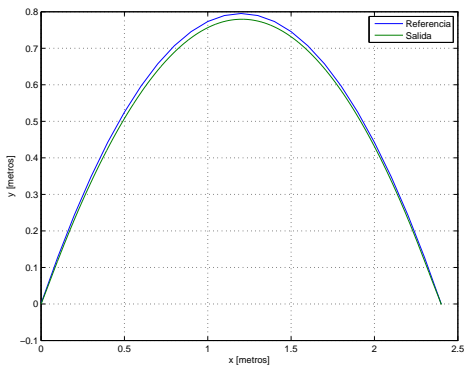
Orientación en pitch, roll y yaw.



Controles u_z , τ_{phi} , τ_{θ} , τ_{ψ} .

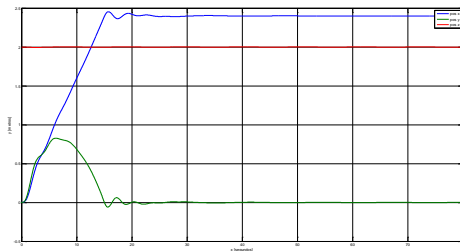


Seguimiento de la trayectoria

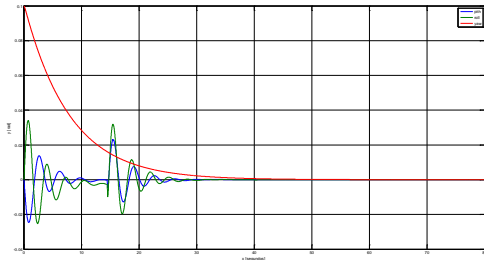


Resultados de simulación con un PID

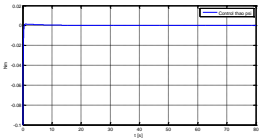
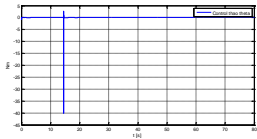
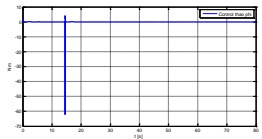
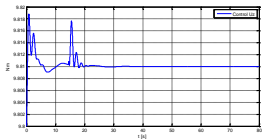
Posición en los ejes x,y,z. Condiciones iniciales: $x = 0m$, $y = 0m$, $z = 2m$



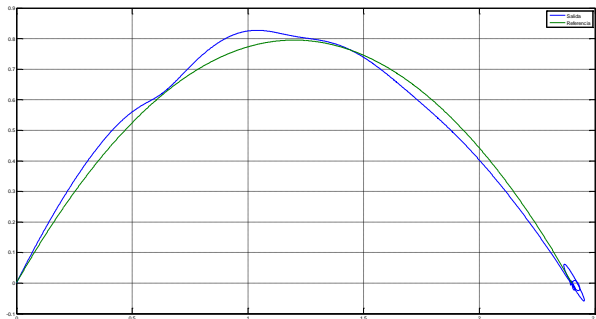
Orientación en pitch, roll y yaw.



Controles u_z , τ_{phi} , τ_{θ} , τ_{ψ} .




Seguimiento de la trayectoria con PID





[Video demostrativo]

Buen día

 R. Lozano, Ed.
Unmanned Aerial Vehicles: Embedded Control.
Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2010.

 Kirk, D.E.
Optimal control Theory and introduccion.
Prentice Hall, 1970.

 O. Santos, H. Romero, S. Salazar and R Lozano.
Discrete Optimal Control for a Quadrotor UAV: Experimental Approach.
Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014 International Conference.

 P. Castillo, P. García, R. Lozano and P. Albertos.
Modelado y estabilización de un helicoptero de cuatro rotores.
Revista Iberoamericana de automatica e informatica industrial
vol.4(1), pp.41-57, 2007